Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística Aplicada a la Ciencia Política

Tomo II

Dr. Rafael Torrez Valdivia

ÍNDICE

Capítulo Primero

INFERENCIA ESTADÍSTICA APLICADA A LA CIENCIA POLÍTICA

INTRODUCCIÓN

Desde los albores de la historia un rasgo que caracteriza a todo agregado de hombres es su preocupación por el futuro y la comprensión de los misterios de los fenómenos de la naturaleza, actualmente también representa un motivo de interés el entendimiento del comportamiento humano individual y social. La angustia que supone el desconocimiento del devenir y de todo aquello que influye significativamente en nuestra existencia, cuando no sabemos cómo funciona, representa una característica humana para todas las sociedades que han alcanzado suficiente grado de civilización en sus diversas épocas de desarrollo. De esta manera, los individuos que se dedicaron a explicar el mundo, han prosperado al mismo tiempo que alcanzaron, en la generalidad de los casos, preeminencia social; aunque excepcionalmente han sido alcanzados por la desgracia, quemados en una hoguera o excluidos en la algazara de la mediocridad, que opaca las voces de los verdaderos sabios.

Por lo argumentado, los sacerdotes, las pitonisas, los brujos, los científicos, los filósofos y todos aquellos que en relación a los demás, supuesta o realmente, tienen la ventaja de conocer lo que está por ser y lo intrínseco de lo que es, forman parte importante de las élites sociales en virtud de su erudición. Las agrupaciones de “sabios”, privilegiadas, en todos los casos, influyen de forma directa o indirecta en la interpretación social e histórica del futuro de la humanidad o en la comprensión de lo que para la generalidad de las personas, los hombres comunes, representa un misterio, aunque la naturaleza intuitiva del ser humano de forma previa al entendimiento estricto nos acerque a la verdad.

Ogaño, en realidad a partir del triunfo de la ilustración[1], como un signo de la época, se exalta la ciencia, y todos, incluso quienes bordean los lindes de la comprensión vulgar, tienen la pretensión de llamarse científicos (hasta el extremo de que una turbamulta de ignorantes, en la coligación lógica y la estadística. Así muchos desde el púlpito del cargo universitario presentan la indicada reivindicación, como si la especulación pudiera suplir las formas necesarias de la comprensión estricta). En nuestro tiempo, por oposición, se menosprecia el conocimiento común, como también el conocimiento filosófico, que no estructura con suficiente precisión un método específico, así la filosofía rindiéndose al dominio de la ciencia, ha pretendido emular sus características bajo los signos kantianos y las graves tentaciones de la lógica general con la que Bertrand Russel y su seguidor Ludovico Wittgenstein intentaron incendiar la filosofía, rescatada para bien de la humanidad por la pasión de hombres como Federico Nietzsche, Martín Heidegger, que en general consideran estultos a quienes no tienen este conocimiento, y la racionalidad de otros como Edmundo Husserl, que procuró dotarle de un método privativo, suficientemente coherente para la apreciación de los sabios dominadores de la lógica y la matemática.

Los estudios científicos prospectivos, sean de sustrato natural o de materia social, de forma estricta se escinden en dos ramas, la analítico-

[1] Coetáneo al de la Revolución Francesa. Debe entenderse por "Ilustración" al movimiento cultural facetado en la racionalidad.

deductiva y la positiva, que a su vez se encausan, respectivamente, en las cuencas de las leyes de la inferencia lógica y de la inferencia estadística. Si bien los estudios puramente deductivos (estrictamente formales), pueden prescindir del auxilio de las conclusiones que impelen los resultados de la teoría de la probabilidad, de la estadística descriptiva y de la inferencia estadística; los estudios positivos, solamente tienen sentido[2] cuando sus resultados son susceptibles de ser contrastados con la realidad, y en este caso, son consubstanciales a que se hubieran desarrollado ora de forma inductiva mediante observaciones particulares de las que se ha extraído el sumun de la generalidad u ora por la docimasia de hipótesis, ambas acciones no pueden hacerse sino se aplican los métodos que enseña la estadística, que aunque como ciencia, por sí, representa interés (como un sistema matemático que hubo alcanzado un alto grado de desarrollo proposicional) tiene más valor como ciencia instrumental; propedéutica que posibilita se erijan, procesen y realicen conclusiones sobre la base de datos[3].

La ciencia política, como categoría gnoseológica, admite diversas interpretaciones[4], sin embargo solo la Ciencia Política Positiva tiene el mérito y, tal vez para los no cultivados en los métodos estadísticos, la petulancia de considerarse como verdadera, **por lo que ninguna persona que ignore la matemática universitaria, al menos fundamental, puede**

---

[2] El término "sentido" como un enunciado que eventualmente puede ser contrastado con la realidad; tomado del libro: "Lógica de la Investigación Científica" de K. Popper, España, Editorial TECNOS S.A., 12ª Edición

[3] In prima facie, entendidos como observaciones precisas y puntuales de una determinada realidad.

[4] **Así por ejemplo pudiéramos concebir la posibilidad epistémica de una Ciencia Política Analítico Deductiva, una Ciencia Política Crítica o de una Ciencia Política Positiva, cuyas proposiciones provienen de la observación, por inducción.**

considerarse científico[5]. Así, la ciencia política positiva, construye su basamento en la descripción de los hechos, por las variables mediante las que son caracterizados, como una proyección del plano infinitamente dimensional de lo real, al plano limitado en el que se concibe un objeto científico o, por la proposición de relaciones causales estructuradas[6], que posibilitan su interpretación actual y futura. Por lo expresado, la Estadística Descriptiva se limita a la descripción estática (de plena certeza de lo que observa) en tanto que la Inferencia Estadística, en aplicación de la teoría de la probabilidad y de apotegmas que le son propios, a la descripción cinética de los hechos, sometida a los avatares del azar (bajo patrones en los que las conclusiones, respecto al valor de lo que se pretende hallar, tienen un grado limitado de verosimilitud).

El presente libro, que contiene la segunda parte de mi obra denominada ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA Y LA INFERENCIA ESTADÍSTICA APLICADA A LA CIENCIA POLÍTICA, hasta la fecha el único texto de enseñanza oficial de la Facultad de Derecho y Ciencias Políticas de la UMSA, intenta discurrir--- alejándose de la superficialidad a la que arrastra el excesivo pragmatismo que se trasunta en los trillados ensayos ingenieriles que ignoran la filosofía y la episteme de la ciencia política positiva, incluidos varios paquetes informáticos--- respecto al significado, al sentido y a la aplicación de los principales métodos de la inferencia estadística en su aplicación al sustrato político, que deberá ser entendido no solamente como la actividad de las instituciones oficiales del estado y de los grupos formales e informales de poder que coexisten en su seno, sino, en un

[5] En nuestro tiempo, al menos el Cálculo Diferencial de Variable Escalar, los rudimentos del Algebra Matricial y de la Teoría de la Probabilidad.

[6] Concebidas bajo formas lógicas o matemáticas

sentido más amplio, como la **actividad mediante la cual una persona**[7] **intenta poner a otra en la esfera de su dominio**[8]**.**

Se han desarrollado los tópicos de la presente obra, en aras de la pedagogía, con suficiente sencillez, sin embargo, resaltando algunas demostraciones que por su importancia no pueden encontrarse ausentes de cualquier exposición que aspire a ser relevante, de la estadística aplicada a la ciencia política.

LA INFERENCIA ESTADÍSTICA Y LA CIENCIA POLÍTICA.-

La ciencia que no intenta la explicación de entidades puramente lógicas o metafísicas, ambas erigidas luego de la delimitación de una base axiomática y de las reglas de su interrelación, necesariamente tiene por instrumento la propedéutica matemática denominada "Estadística", nombre que desafortunadamente, y en contra de las propias reglas de composición científica, admite varias acepciones; entre las más destacadas, la más elemental o básica (en un ámbito no vulgar), asimila a los resultados producidos por un conjunto de datos, "estadígrafos" (como, la Media Aritmética, La mediana, la Desviación Típica etcétera); otra concentrada en su función, la define como la **ciencia que genera las operaciones matemáticas que permiten sea inteligible, en un sentido no**

[7] La definición de persona, como entidad que tiene voluntad incluye al Estado e incluso a las personas que no son reconocidas por éste.

[8] Explanado así en el conocido texto básico, y por lo tanto de lectura imprescindible: "Introducción a la Política" de Mauricio Duverger, Barcelona-España, Editorial Ariel Colección Demos, 1978.

trivial o filosófico[9], la realidad natural o social[10]; también se la puede entender como una rama de la matemática que independientemente de su aplicación, tiene suficiente relevancia, y que por ello adquirió en nuestro tiempo autonomía, en la posibles diversidades de su interpretación, en atención al origen de su nombre, se puede afirmar sin incurrir en la banalidad, que es **la ciencia que permite una adecuada organización del Estado, mediante el establecimiento de las reglas que hacen posible objetivar sus recursos [11]**.

La postrema definición tiene referencia a la genealogía que permite señalar el surgimiento de la Estadística, primero plasmada en un conjunto de metódicas contables, como las sugeridas por Luca Paccioli[12] o William Petty[13], luego, mediante reglas generales de la descripción precisa de la realidad y posteriormente mediante leyes matemáticas, que posibilitaron la comprensión de los elementos de un género, no en la placidez del mundo determinístico, sino, en lo arrebatado de lo que se somete a la contingencia. Por último, en vista de que la propia metódica estadística, despojada de un contenido, representa suficiente interés como estructura teoremática, se ha escindido la estadística en una rama aplicada y en otra puramente teórica; la Estadística Matemática,

[9] No se quiere expresar mediante éste aserto que la interpretación vulgar se asimile o al menos tenga el mismo valor que la filosófica, sino simplemente, que son dos posibilidades mutuamente excluyentes de asimilar el mundo.

[10] Definición Propia de los autores, implica por complemento que ninguna interpretación del mundo, que no se construya sobre la base de datos y usando el instrumental estadístico, no tiene el mérito de ser denominada científica.

[11] Definición propia de los autores.

[12] Luca Paccioli (1445-1517), precursor del cálculo de probabilidades, considerado el "Padre de la Contabilidad" por haber inventado el principio de la doble partida

[13] William Petty (1623-1687) famoso autor de la "Aritmética Política (1960)", obra en la afirma que todos los bienes que posee un estado son susceptibles de ser mensurados.

convertida en una teoría matemática madura, le ha dado sentido a la ciencias positivas, que observan, teorizan y contrastan empíricamente, erigiendo, refutando o condenando una teoría sobre la base de la cruda realidad, que para la comprensión no animal, se representa en datos[14].

La ciencia política verdadera, una especie de las ciencias positivas, perseguida en nuestro tiempo con la misma saña que sufren las religiones, por los "Ideólogos" como M. Foucault, P. Bourdieu, J. Derrida, M. Horkheimer, T. Adorno, J. Habermas, de modo ineluctable utilizará el instrumental provisto por la Ciencia Estadística. La denominada Ciencia Crítica, como un método alternativo de interpretación del mundo, que bajo un objetivo ideológico, entiende la realidad bajo lentes de distintos colores, incluso los del arcoíris[15].

CATEGORÍAS[16] PRIMIGENIAS DE LA TEORÍA[17] DE LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

Definición del Término Dato.-

Un dato, es **la proyección delimitada que un hecho provoca en la mente de un sujeto.** Es una proyección delimitada, en vista de que no se lo

[14] Se dará, más adelante, una interpretación precisa del término "dato", por ser muy importante.

[15] Se hace referencia indirecta a la bandera que blanden los homosexuales.

[16] Se entiende por categoría a un concepto muy importante (por lo que su conocimiento resulta imprescindible) en la generación de una teoría o de una doctrina (Definición de los autores).

[17] Una "Teoría" es un conjunto de proposiciones conexas de distinta jerarquía, que tienen por propósito la descripción, la explicación o la inferencia, de un objeto suficientemente relevante. La jerarquía de las proposiciones componentes se establece en consecuencia de la relevancia que tienen: a) En la definición del Objeto que pretenden explicar, entendido en abstracto. b) En las relaciones funcionales que subyacen a su existencia, c) En su delimitación concreta, d) En sus accidentes (definición de los autores).

entiende fuera de un contexto que ha definido su interpretación en referencia a una variable cuya naturaleza cuantitativa o cualitativa, representa el ámbito característico de su existencia. En general los hechos de modo objetivo, se entienden como un conjunto de datos, cuyo sentido y significado se ha establecido de forma previa en abstracto. **Bajo un interés pedagógico, un dato es una característica escalar o vectorial que se le atribuye a un ente**.

> **Ilustración.-** 1) Constituye un dato vectorial en tres dimensiones, en referencia a un gas, su volumen limitado en mililitros, su presión entendida en pascales, su temperatura comprendida mediante grados centígrados. 2) La antigüedad de un gobernante y el grado de educación al que llegó, es un dato vectorial bidimensional. 3) El porcentaje de abstención electoral, es un dato escalar.

Definición del Término Azar.-

La palabra azar, representa en el ámbito científico lo que en el vulgar evoca la palabra "suerte", **el azar es la influencia de todas las fuerzas causales que no habiendo sido identificadas, influyen en el momento de producirse el resultado de un hecho natural o social[18]**. Aún bajo una interpretación determinista del mundo, que asume que a partir del inicio del universo, el resultado de todos los fenómenos se encuentra precisado, tiene igualmente sentido referirse al azar, en el acto cognoscente (que identifica un sujeto), que ignora de forma exacta la determinación aludida, porque el intelecto (individual o colectivo) es incapaz de tener conciencia omnisciente del designio universal. En la episteme, como se deduce de la definición citerior, sería imposible

[18] Definición de los autores.

entender la definición del término azar, si no se comprende previamente la definición del Término "Objeto Científico".

Definición del Término Objeto Científico.-

Un objeto científico, es la representación de una cosa o de un fenómeno, por sus características sustanciales, excluyendo aquellas que para su comprensión no resultan necesarias. **Un objeto científico, representa la delimitación mediante un conjunto de elementos de una complejidad real, para poder ser entendida en abstracto.** Es el conjunto de proyecciones de un ente real sobre los ejes vectoriales de un sistema de coordenadas (plano de comprensión científico) cuyas reglas de composición se han definido de forma previa, reglas de composición del sistema de coordenadas, como también las reglas de proyección sobre los ejes que conforman el sistema de proyección, las mencionadas reglas, no son únicas sino dependen del grado de precisión que se intente dar a la entidad real. En un apartado anterior, se hace referencia a la Población Objetivo, se precisará por ser muy importante, el concepto que se discute en éste acápite.

Definición del Término Experimento.-

Deberá entenderse por experimento a un acto científico consistente en la inducción de un suceso cuyo resultado de algún modo depende del azar, estando sin embargo suficientemente circunscrito a un número limitado de posibilidades o a la acotación racional de estas. El acto de experimentar es un acto plenamente consciente en el que un sujeto patrocina la realización de un evento cuyo resultado a priori es múltiple, aunque a posteriori se efectiviza en un único valor (o un subconjunto de los resultados posibles). Se ha hecho popular la idea de que un experimento solamente puede realizarse dentro de los límites de un laboratorio, esta apreciación es innecesariamente restrictiva, en virtud de que es suficiente que una voluntad consciente con capacidad de registrar los resultados y circunscribir (delimitar) el hecho azaroso, intervenga al momento de su producción.

> **Ilustración.-** La caída de un número determinado de rayos en un espacio geográfico y en un determinado tiempo no constituye un experimento (porque no ha sido provocado por algún hombre), aunque si el acto de que se registre bajo la limitación anotada cuantos rayos cayeron en la unidad de tiempo elegida, la propia delimitación geográfica y del momento de registro, constituye parte de la intensión.

Definición del Término Espacio Muestral.-

Se define en sentido estricto, por Espacio Muestral, a todos los resultados posibles de la realización de un experimento. Un Espacio Muestral es el conjunto que contiene la totalidad de los resultados posibles de un experimento, entendidos de forma extensiva[19] o bajo una regla que permite generarlos, una vez que se ha establecido su delimitación.

> **Ilustración.-** El espacio muestral que resulta del evento arrojar una moneda (con borde filoso) es el conjunto que contiene los eventos, que la moneda salga en cara y el que la moneda salga en cruz, cualquier otro resultado no tiene sentido en referencia al experimento.

Presentando otro ejemplo, dado un conjunto de partidos políticos que pugnan en una elección, se puede definir el espacio muestral asociado al

[19] Descritos de modo exhaustivo; uno por uno.

indicado evento, como la totalidad de ordenes gradientes[20] posibles que pudieran generarse a partir de su resultado, en este caso el resultado es vectorial.

Definición del Término Variable Aleatoria.-

En un sentido estricto, una variable aleatoria es un conjunto numérico, que circunscripto a la axiomática de la probabilidad, representa la proyección de un espacio muestral[21], de modo sobreyectivo e inyectivo. Sobreyectivo**, en el sentido de que todos los eventos contenidos como elementos del espacio muestral tienen un reflejo (numérico) en la variable aleatoria e** inyectivo, **significando que presentan un único reflejo.**

Existen dos clases de variables aleatorias, las variables aleatorias discretas y las variables aleatorias continuas, (pudiendo aceptarse una clase anfótera que resulta de la combinación de entrambas) que serán precisadas en los siguientes parágrafos.

Variable Aleatoria Discreta.-

Se define por Variable Aleatoria Discreta al conjunto numérico numerable[22] (sus elementos se pueden hacer corresponder

[20] El total de permutaciones generadas a partir de ordenar los partidos en referencia del resultado electoral.
[21] Definición de los autores
[22] Un "Conjunto Numérico Numerable", está integrado por números que se pueden contar.

biyectivamente[23] con el conjunto de los números naturales) en el que se proyecta funcionalmente[24] un espacio muestral.

Variable Aleatoria Continua.-

Una Variable Aleatoria Continua, está constituida por uno o por varios segmentes no intersectados[25] del conjunto de los números reales, que representan los elementos de un espacio muestral (en la generalidad infinito no numerable, aunque esta no es una limitación para que un espacio muestral numerable no pueda ser representado por un espacio muestral no numerable.

A los resultados numerables de un experimento les pudiera corresponder un conjunto integrado por segmentos de los Reales, sin embargo, si los resultados fueran infinitos no numerables, es imposible que sean representados por cualquier conjunto numerable como por ejemplo el conjunto de los Racionales, no quedando otra alternativa de que sean expresados, por un conjunto no numerable, como lo es el conjunto de los Reales. La "Acotación Originaria" de los elementos de un espacio muestral, a efecto de hacer sus elementos numerables, no representa por sí la definición de una variable aleatoria.

Ilustración.- En un conjunto de eventos que constituye la vida superior, entendida a partir de la concepción, pudiera definirse como evento relevante el nacimiento. Y a partir de esta interpretación,

[23] A cada elemento de la Variable Aleatoria le corresponde un único número natural y recíprocamente a ese número natural le corresponde únicamente aquel elemento de la variable aleatoria. Entre los conjuntos se define de modo reciproco una función inversa, es decir los conjuntos son recíprocamente funcionales (definición del autor).

[24] Sobreyectivamente e inyectivamente.

[25] Que no tienen elementos en común.

asumir que la muerte tiene la posibilidad de ocurrir en infinitos, no numerables, momentos de ocurrir a partir de la concepción, en el momento exacto del nacimiento y en otros infinitos, no numerables momentos desde este (sin incluirlo), hasta la muerte. El primer tracto puede ser representado mediante una variable aleatoria continua, el segundo por una variable aleatoria discreta y el tercero por otra continua.

Definición del término Campo de Probabilidad.-

El campo de probabilidad de una variable aleatoria discreta es el conjunto de puntos pertenecientes a un espacio euclideo discontinuo establecido como un producto vectorial de dos ejes numéricos numerables para los cuales la probabilidad es diferente de cero.

El **Campo de Probabilidad de una Variable Aleatoria Continua,** es el espacio euclideo resultante del producto vectorial de dos o más ejes vectoriales (en composición ortogonal)[26] en el cual su puntos componentes manifiestan, bajo una medida de intensidad, la posibilidad de la realización de un suceso[27].

Funciones de cuantía de probabilidad.-

Se denomina función de cuantía de probabilidad a la función que asigna un valor de probabilidad a cada uno de los puntos del campo de probabilidad de una variable aleatoria discreta, de forma que la probabilidad asignada es mayor o igual a cero, siendo la suma total de las probabilidades asignadas igual a uno.

[26] Perpendiculares entre sí.

[27] Definición propia del autor.

En el caso escalar:

$$P(x) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P(x_i) = 1 \quad , \quad \bigvee x_i \in \vartheta$$

Donde **ϑ** es el campo de definición de la variable aleatoria.

En un ámbito más amplio se cumple, siguiendo la axiomática de la probabilidad:

$$P\left(x_{1,i}\ \ x_{2,i} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots x_{n,i}\right) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} P\left(x_{1,i}\ \ x_{2,i}\ \ x_{3,i} \ldots \ldots . x_{n,i}\right) = 1$$

Funciones de Densidad de probabilidad.-

Las funciones que señalan la **intensidad de probabilidad** en los infinito-no numerables puntos de un campo continuo, que a su vez representa un espacio muestral S_x de la misma naturaleza[28], se denominan **Funciones de Densidad de Probabilidad[29], $\boldsymbol{f(x)}$**. Como se explicó en el primer tomo, cumplen con la axiomática de la probabilidad de modo que 1) son no negativas en todo su campo de existencia, R_x, que in prima facie está representado por todos los números reales, que sin embargo, con

[28] Escalar o vectorial, en el cual la función de densidad es distinta de cero. Aunque excepcionalmente pudiera tomar este valor en un punto interior del referido campo.
[29] El valor de la probabilidad en una singularidad, un punto, evidentemente es cero, en consecuencia de la definición clásica de la probabilidad, casos favorables (en este caso uno) sobre casos totales (infinitos). La anterior idea ha sido expuesta en el primer tomo de la obra de modo extenso.

efectos prácticos, en numerosos casos, se acota en uno o más segmentos[30]. 2) además que en el referido campo la agregación infinitesimal de las funciones de densidad de probabilidad es uno; en particular, en el caso de que el campo en el cual se define la función sea unidimensional, que se denomina **escalar,** se tiene

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{R_x} f(x)dx$

In estricto sensu (en términos matemáticos), las funciones de densidad de probabilidad están definidas como el cociente del cambio de la acumulación de probabilidad ocasionado por la variación del argumento **(x)** y, el mencionado cambio del argumento, cuando este cambio (*h*) se hace indefinidamente cero; la densidad de probabilidad es la probabilidad infinitesimal suscitada en la vecindad de un punto perteneciente al campo de existencia de una variable aleatoria continua.

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x}(x+h)dx - \int_{-\infty}^{x}(x)dx}{h}$$

En el caso de que el campo no sea unidimensional, es decir se represente mediante un vector genérico[31], k dimensional, $\aleph_k = (x_1, x_2, x_3, \dots \dots x_k)$, de similar manera se cumple que:

1) $f(\aleph_k) \geq 0$

[30] Definidos con precisión, mediante sus cotas, que en general en las referidas cotas expresan un valor para la función de densidad de probabilidad diferente de cero.

[31] Que representa cualquiera de los puntos que componen el campo.

2) $\int\int\int \ldots\ldots\ldots \int_{R_{\aleph_k}} f(\aleph_k)dx_1 dx_2 dx_3 \ldots\ldots . dx_k = 1$

Definiéndose la función de densidad de probabilidad vectorial como:

$$f(\aleph_k) = \lim_{h_k \to 0} \frac{\int\int\int \ldots\ldots\ldots \int_{R_{\aleph_k}} (\aleph_k + h)dx - \int\int\int \ldots\ldots\ldots \int_{R_{\aleph_k}} (\aleph_k)dx}{h_k}$$

Expresión en la que h_k representa un vector de infinitésimos[32].

En adelante, debido al nivel que se pretende otorgar al texto[33], únicamente se hará referencia a funciones de densidad de probabilidad escalares.

Funciones de Distribución de Probabilidad

Se define la función de acumulación de probabilidad, $F_X(t)$, que también se llaman Función de Distribución de Probabilidad, como la función que indica hasta un parámetro t, perteneciente al campo de definición de la variable aleatoria, cual es la probabilidad de que ocurran eventos representados por sus valores comprendidos desde la cota minorante (***cm***) de la variable, hasta el indicado punto t[34].

En el caso de variables aleatorias discretas

$$F_X(t) = P(X \leq \boldsymbol{t}) = \sum_{cm}^{t} P(x_i)$$

En el caso de variables aleatorias continuas

[32] Un vector en el que todos sus componentes son indefinidamente pequeños.
[33] Guia para un primer año de la Carrera de Ciencia Política y Gestión Pública.
[34] En la definición matemática que sigue, se ha asumido que el minorante corresponde a $-\infty$, aunque evidentemente su acotación puede ser reducida a valores relevantes (con densidad de probabilidad distinta de cero).

$$F_X(t) = P(X \leq \boldsymbol{t}) = \int_{cm}^{t} f(x)dx,$$

Esperanza Matemática de Una Variable Aleatoria.-

Se define por esperanza matemática al valor al cual converge un campo de probabilidad[35]. En el caso de las variables aleatorias discretas es la sumatoria de los productos de los valores que definen la variable aleatoria, por sus respectivas probabilidades. La esperanza matemática de las variables aleatorias continuas es, **La suma infinitesimal (en su campo de existencia) del producto de los elementos de una variable aleatoria por la densidad de probabilidad, en cada uno de los indicados puntos**[36];

Caso discreto $\quad E(x) = \sum_{R_x} x_i P(x_i)$

Caso continuo $\quad E(x) = \int_{R_x} x\, f(x)dx$

Variancia y Desviación Típica de Una Variable Aleatoria

El grado de dispersión[37] de los valores concurrentes en un campo de probabilidad inherente a una variable aleatoria, puede ser evaluado, entre varias maneras posibles, de forma principal[38], mediante su variancia, $V(x)$, o su desviación típica, s_x, definiéndose la variancia como la Esperanza Matemática de los desvíos cuadráticos de la variable

[35] Parafraseando: "La esperanza matemática de una variable aleatoria, es el parámetro que representa a la integridad del recorrido de la variable aleatoria, dado un campo de probabilidad inherente a los elementos que la integran"
[36] Definición del Autor.
[37] Cuan semejantes son entre sí.
[38] Porque suponen los métodos más recurridos para evaluar la dispersión.

aleatoria, respecto a su media; y por desviación típica, a la raíz cuadrada positiva del indicado valor[39]:

$$V(x) = E(\left(x - E(x)\right)^2 = E(x^2 - 2xE(x) + E(x)^2)$$

$$V(x) = E(x^2) - E\left(2xE(x)\right) + E(E(x)^2$$

$$\boldsymbol{V(x) = \ E(x^2) - E(x)^2}$$

Expresión equivalente que permite alternativamente decir que la variancia de una variable es igual a la esperanza matemática de sus valores al cuadrado menos su esperanza matemática al cuadrado.

$$s_x = \sqrt[2]{V(x)}$$

Es importante notar que la desviación típica de una variable es un parámetro expresado en sus mismas unidades.

Funciones de Variables Aleatorias

Se define por función de una variable aleatoria,x (Función de Variable Aleatoria, FVA), a la función escalar o vectorial $g(x)$, que la tiene por argumento. Transformando la representación matemática de un espacio muestral, siendo equivalentes en términos de la probabilidad (Densidad de Probabilidad) las dos diferentes representaciones.

Ilustración.- El espacio muestral asociado al experimento, los resultados de arrojar un dado, puede ser representado por

[39] Tómese en cuenta que el resultado es análogo al que se refiere para las variables descriptivas interpretadas en el capítulo octavo del primer tomo de la obra.

$X = \{1, 2,3,4,5,6\}$ o alternativamente, definiendo $y = 2x - 3$ por el conjunto $Y = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$.

Ilustración (I).-Definiéndose la variable aleatoria continua como la **fracción unitaria**[40] que obtendría un partido político participe en una elección determinada, x, la variable aleatoria definida como la **preminencia política[41] ,$\boldsymbol{y = \frac{x}{1-x}}$,** representa una transformación en el intervalo abierto $]0\ \infty[$.

Funciones de Probabilidad y de Densidad de Probabilidad de Variables Aleatorias Transformadas

Una transformación monótona estrictamente creciente **[42]**, $y = h(x)$ de una variable aleatoria, tiene por función de distribución de probabilidad:

$$F_Y(t) = F_X(h^{-1}(t))$$

En tanto que una transformación monótona estrictamente decreciente presenta la siguiente función de distribución de probabilidad:

$$F_Y(t) = 1 - F_X(h^{-1}(t)) + P(x = h^{-1}(t))$$

[40] En términos porcentuales, más usuales, se entiende como el porcentaje de votación.

[41] Definida como el porcentaje que adquiere una fuerza política partícipe en una elección, respecto al que no lo obtiene. Representa una medida del dominio que tiene una fuerza política en un campo político.

[42] Una Transformación Monótona Creciente se da cuando siendo $y = f(x)$, y v un parámetro cualquiera, implica que en todo el campo de la transformación

$$si\ (x + v) > x \rightarrow f(x + v) > f(x)$$

De forma opuesta una Transformación Monótona Decreciente se da en el caso de que $si\ (x + v) > x \rightarrow f(x + v) < f(x)$

Momentos y Función Generatriz de Momentos

Se tiene por el momento n de una variable aleatoria, $M_x(n)$, a la esperanza matemática de los valores de la variable aleatoria elevados al natural n;

$$M_x(n) = E(x^n)$$

Deberá entenderse que la Función Generatriz de Momentos de una Variable Aleatoria Discreta viene dada por:

$$E(e^{t\,x}) = \sum_{R_x} e^{t\,x}\, P_x$$

Se define la función generatriz de momentos, $M_x\,(t)$, de una variable aleatoria continua como la esperanza matemática de $e^{t\,x}$; expresión en la que t es una variable auxiliar “post funcional[43]”, en caso de que la referida exista, sea finita, en otro caso, la variable aleatoria carece de una función generatriz de momentos;

$$M_x\,(t) = E(e^{t\,x}) = \int_{R_x} e^{t\,x}\, f(x) dx$$

Expresión en la que R_x, representa el campo de definición de la variable aleatoria, esta función es altamente importante porque permite de una manera operacionalmente fácil encontrar los momentos no desplazados[44] de una variable aleatoria (y mediante ellos sus estadígrafos principales)

[43] Tomada como una constante al momento de encontrarse la esperanza matemática y como una variable luego de que ésta es hallada.

[44] No desplazado, significa el momento respecto al origen (cero), un momento desplazado respecto a una constante, que regularmente es un estadígrafo de tendencia central, puede ser representado por $E((x-c)^n)$, que implica un desplazamiento simple del vector que mide la variable aleatoria.

Se encuentra un momento específico, n, de la variable aleatoria derivando n veces la función generatriz de momentos, respecto a la variable auxiliar t, es decir sucesivamente en correspondencia al número de momento que se quiere encontrar[45] y, evaluando luego esta derivada en t= 0 [46];

$$E(x^n) = \frac{d(E(e^{xt}))}{dt^n} \Big|_{t=0}$$

Teorema de La Unicidad de la Función Generatriz de Momentos y otros teoremas relacionados

El teorema nominado, cuya demostración excede el nivel de la matemática usada en la exposición del presente texto, como se ha referenciado en la introducción del presente capítulo, es crucial en la interrelación de la Normal y la Chi Cuadrado que se expondrá más adelante y, se puede hacer efable de la siguiente manera:

Si se ha verificado que dos variables aleatorias, tienen la misma función generatriz de momentos, entonces se puede afirmar que ambas tienen la misma distribución de probabilidad[47]. Mediante otra enunciación, se puede afirmar **que en el caso de que sea posible encontrarla[48], a cada variable aleatoria le corresponde una única función generatriz de momentos.**

---

[45] Durante las operaciones mencionadas, se asume invariante la variable aleatoria x

[46] La función generatriz de momentos, representa una notable aplicación de la serie de Mclaurin en la que la función exponencial de base natural tiene el desarrollo:

$$\boldsymbol{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}}$$

[47] La misma Función de Cuantía de Probabilidad si son discretas y la misma función de densidad de probabilidad cuando son continuas.

[48] No es posible hallar en todos los casos el algoritmo que define la función generatriz de momentos respectiva.

Otros teoremas importantes, relacionados al principal, enuncian:

1) Que, la función generatriz de momentos de una variable aleatoria transformada mediante la adición de una constante c, es la función generatriz de momentos de la variable original multiplicada por la base neperiana elevada a la constante multiplicada por t[49];

$$M_{x+c}\,(t) = e^{c\,t} M_x(t)$$

2) Que, la función generatriz de momentos de una variable aleatoria transformada mediante la multiplicación de una constante *a*, es la función generatriz de la variable aleatoria original, en la que el argumento t, es sustituido por *t´* que es igual al producto de *t* con la constante indicada[50];

$$M_{cx}\,(t) = M_x(at)$$

3) Que, la función generatriz de momentos de la variable aleatoria que resulta de la suma de n variables aleatorias independientes, es igual al producto de las funciones generatrices de momentos de sus funciones componentes[51].

$$\boldsymbol{M_{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}\,(t) = \prod_{i=1}^{i=n} M_{x_i}(t)}$$

---

[49] Enunciado evidente en aplicación de las propiedades de los exponentes y de la esperanza matemática.

[50] En este caso el simple cambio de variable de t´=at, hace evidente el resultado.

[51] Demostración :Sea $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \dots\dots\dots x_m$ con la funciones generatriz de momentos: $M_S(t) = E(e^{st})$

$$M_S(t) = E\left(e^{(x_1+x_2+x_3+x_4 \dots\dots\dots x_m)t}\right) = E(e^{x_1 t} * e^{x_2 t} * e^{x_3 t} * e^{x_4 t} \dots\dots\dots e^{x_m t})$$

$$M_S(t) = E(e^{x_1 t}) * E(e^{x_2 t}) * E(e^{x_3 t}) * E(e^{x_4 t}) \dots\dots\dots\dots E(e^{x_m t})$$

$$M_S(t) = M_{x_1}(t) * M_{x_2}(t) * M_{x_3}(t) * M_{x_4}(t) \dots\dots\dots\dots\dots.. M_{x_m}(t) =$$

$\prod_{i=1}^{i=m} M_{x_i}(t)$

Capítulo Segundo

PRINCIPALES CONCEPTOS Y OBJETIVOS DE LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

De acuerdo al grado de su desarrollo, y como se afirmó en el capítulo primero del primer tomo, toda ciencia positiva intenta cumplir en orden secuencial, los siguientes objetivos:

a) **La descripción** de un sustrato delimitado (mediante categorías epistémicas especiales, previamente definidas en aras de la misión enunciada). Resulta un absurdo denominar científica a una descripción que no tenga por base su referencia a un sustrato de datos y el método para su procesamiento.

b) **La interpretación de los vínculos causales** mediante teorías inductivas[52], o mediante la contrastación de hipótesis previas, respecto a la relación entre las variables que definen en abstracto un objeto científico, o la verificación de la subsunción de un hecho concreto a la aludida definición.

[52] Los grados después de múltiples observaciones, plasmados en exhaustivas descripciones

c) **La predicción** intrapolar[53] o extrapolar de las relaciones funcionales que completarían una nueva posición del objeto científico, entendido como un vector integrado por un número limitado de variables[54]. Predicción necesariamente sujeta a un modelo matemático, o al menos, a una estructura proposicional en la que son explicitas las reglas de composición de los elementos que la integran.

Definición del término Estadística Inferencial.-

Se puede definir el significante Estadística Inferencial como:

> "**El conjunto de procedimientos que permiten, con un error máximo predeterminado y a un grado de confianza no absoluto, la determinación de parámetros o características inherentes al estado actual o futuro una población, sobre la base de parámetros muestrales, denominados estadígrafos muestrales[55]".**

En otros términos:

Representa el estudio de los métodos que permiten establecer la **apreciación científica no descriptiva,** actual o futura, de un sustrato (natural o social) cuyo conocimiento es el objetivo de la investigación. La inferencia estadística enseña a conocer, con un grado aceptable de verosimilitud, **el todo[56] mediante la parte** (La población teniendo como

[53] Cuyo valor se encuentra entre los valores previamente observados del efecto.
[54] Las más importantes en razón de su comprensión.
[55] Definición del autor.
[56] En el contexto de las ideas que se explanan, se entiende el "todo" como la reunión de los elementos que lo conforman bajo una relación que escapa a lo puramente agregativo, en referencia a que se plasma en una peculiar distribución.

instrumento la muestra) y el futuro, mediante el comportamiento pasado y presente de los datos.

El término **apreciación científica**[57], in prima facie grandilocuente, se justifica en virtud a que cualquier otra forma de conocimiento de un sustrato objetivo, en cualquier ciencia natural o social, librada al arbitrio de la especulación y no enmarcada en los cánones estrictos de la inferencia estadística, que generan formas específicas de interpretación de un conjunto de datos (en general) interrelacionados entre sí, se escapa de los lindes de la objetividad[58], un requisito esencial de cualquier codificación de conocimientos que alcanzó la calidad de ser incorporado a los sistemas científicos.

DISTRIBUCIONES DE MUESTREO

Población y Muestra.- En la definición citerior se ha nombrado dos términos que merecen ser suficientemente explicitados, **población y muestra**:

[57] La Apreciación Científica, definida en el texto de forma implícita, explícitamente quiere decir, observación metódica de una realidad, en la cual sus elementos, son considerados como elementos primigenios de una o varias operaciones que quiere dotarles de sistematicidad. A su vez, el término operación significa, la definición de una relación lógica o metódica, entre dos o más factores, (los elementos naturales o sociales representados por símbolos), de modo que entre ellos puedan determinarse relaciones funcionales suficientemente significativas, en relación a la intensión original que ha motivado el acto de su comprensión.

[58] Que sea observado por cualquiera, que tiene el conocimiento de su definición (proyección a un conjunto de variables) de la misma manera

POBLACIÓN

Discusión e Interpretación Filosófica de la Población

En la ciencia positiva se considera población a un género integrado por varios (incluso infinitos[59]) especímenes que expresan características comunes, los cuales originalmente siendo "**cosas**" reales o sociales, se convierten en "**objetos**", cuando para su comprensión (transportación a la objetividad) se les atribuye un vector de características y en determinados casos, nexos previos de interrelación entre los indicados atributos. El término hecho natural o hecho social[60], implica en todos los casos, la comprensión de un acontecimiento en referencia a la subsunción de categorías previamente establecidas, por lo que **los hechos, como entidades que pueda procesar la inteligencia consciente, no existen de forma independiente de los conceptos que permiten su interpretación**. Entonces aunque existe sin la presencia de al menos un sujeto, un mundo de cosas, que incluso pudieran ser captadas por el instinto, estas cosas, en el momento de convertirse en elementos de un género, al que la mente les ha otorgado caracterización, se convierten en objetos científicos, <u>tanto mejor troquelados, cuando la **inteligencia** ha</u>

[59] En realidad, significa que los elementos que conforman una población, puedan contarse, o mejor, se pueda hacer corresponder biunívocamente los elementos de la población con los correspondientes del conjunto de los números naturales.

[60] Difundido de forma profusa por el Sociólogo Emilio Durkheim, principalmente en el texto denominado "*Las reglas del Método Sociológico*". En realidad, un "Hecho Social" es un acontecimiento de relevancia social, comprendido por su subsunción a conceptualizaciones que lo desarrollan en abstracto. La ciencia o incluso el Estado (en el caso de la definición de los delitos) define las características de una conducta, en nuestro medio, muchos Fiscales de Materia e incluso docentes del área penal, expresan, nimbados en la ignorancia "Se investigan hechos y no delitos", como si los hechos pudieran ser comprendidos en abstracción de un tipo.

elegido, del mejor modo posible[61], las variables adecuadas para su descripción.

Entonces; “la cosa”, representa una entidad natural o social, de apreciación y de identificación intuitiva[62] e ilimitada (integrada por infinitas variables), en tanto que el objeto constituye la proyección de la cosa a un espacio euclideo [63] (o a veces a un espacio mucho más complejo) constituido por un conjunto predefinido de variables, en interés del sujeto que pretende conocerla. Si bien la cosa, tiene existencia independiente del sujeto, porque de forma previa forma parte del mundo, el objeto que se intenta conocer, surge y adquiere existencia de la unión hipostática de la mente individual o colectiva del sujeto, que ha seleccionado con una intención, las particularidades[64] que considera son relevantes en la cosa. Por lo expuesto, **dos sujetos distintos, pueden contemplar la misma “cosa”, sin embargo contemplarán el mismo objeto, sí y sólo sí previamente hubieran concordado en las características que lo proyectan a la comprensión y luego a la posibilidad de su comunicación[65]**. En realidad, si no se hubieran puesto de acuerdo previamente en las variables que definen la cosa, sería

[61] El menor modo posible, en atención a un interés cognitivo específico. Pudieran ser diferentes las variables que delimitan un objeto científico si la motivación es distinta.
[62] El autor en sus Discursos Filosóficos, propone que la intuición es un intermedio entre el instinto y la razón y tiene una raigambre exclusivamente humana.
[63] Un espacio, cuyos planos de proyección se encuentran coordinados bajo reglas predefinidas. El concepto referenciado, representa una generalización del Espacio Euclideo Físico, definido como un conjunto de ejes coordenados bajo una relación ortogonal y cuyas medidas paramétricas tienen la misma dimensión.
[64] De cada singularidad perteneciente al género.
[65] Ésta idea, en esos mismos términos, fue expresada por la filósofa boliviana Edda Valdivia Viuda de Martínez.

imposible su comunicación o al menos se distorsionaría, en tanto que al referirse a una misma cosa, la interpretarían como objetos distintos.

La población (o una población), debido a los argumentos vertidos, representa un constructo definido de forma previa con un alto grado de arbitrariedad[66], que sin embargo una vez establecido, reata cualquier interpretación a su definición primigenia. Los enunciados que se expresan respecto a la población en todos los casos representan generalizaciones[67].

Ilustración.- El género “los estudiantes universitarios”, originalmente representa una agregación de cosas singulares, sin embargo si los identificamos por ejemplo, por cuatro variables como ser: La universidad a la que pertenecen, su sexo, su edad, y la carrera que siguen, se convierte en objeto científico, cuya reunión de componentes, bajo esa restricción, se denomina población de estudiantes universitarios. Las mismas cosas, estudiantes universitarios, pudieran convertirse en objeto distinto, y por ende una población diferente si a la tetra dimensionalidad que los define agregaríamos por ejemplo, el promedio de notas y su nivel de inteligencia de los elementos integrantes del género, entonces serían

[66] El significado del género, discutido por primera vez en el Organón de Aristóteles que le denominó “Sustancia Segunda”, ha provocado una de las más importantes discusiones filosóficas de todos los tiempos, que alcanzó relevancia en la edad media, en la que se originaron profundas disquisiciones ontológicas entre los propulsores del Realismo, el Nominalismo y el Conceptualismo

[67] En el sentido culto, una generalización, es un predicado que se dirige a la descripción o interpretación de un género, en el uso vulgar, la palabra generalización refiere la atribución de una característica a todos los elementos poblacionales.

entendidos como objetos en la sexta dimensión. Nótese que corresponderían a distintas proyecciones de la misma población real.

Objetivo de Una Investigación Científica.-

El objetivo de toda investigación científica positiva es el conocimiento---con un ánimo estrictamente académico o con la finalidad de utilizar este conocimiento de forma práctica-- a un grado suficiente de certeza[68], de una población[69]. El conocer la población, presenta tres posibilidades:

1) La comprensión de las determinaciones fácticas relevantes de un género, entendido como reunión de objetos singulares que mediante su inscripción en un conjunto, que los supone interrelacionados adquiere personificación[70]. La propia definición de su significado, mediante la elección de las variables que la representan como objeto científico.

2) La determinación de parámetros (numéricos) que permiten, en referencia a las categorías enunciadas en el punto anterior, su caracterización general en referencia de sus elementos, respecto a su representatividad, semejanza, tendencia y aproximación a un género ideal,

3) El sentido y el significado que hacen que la población, represente mucho más que la agregación simple de los elementos que la conforman, de manera que incluso características eminentemente cuantitativas, no

[68] En el sentido de aproximación a la verdad

[69] Aún en el caso de que se estudiara una individualidad, se haría referencia como se porta en el tiempo o en relación a las demás; cada uno de estos puntos representaría un elemento para la comprensión de la individualidad.

[70] Puede entenderse de forma distinta e independiente de los elementos que la hubieron constituido.

necesariamente otorguen un resultado convexo[71] o una operación conmutativa[72].

4) El pronóstico de su composición en el futuro, sobre la base de las tendencias que en el pasado y en el presente han indicado sus elementos componentes.

> **Ilustración**: Sean dos fuerzas políticas A y B, la primera dotada de una intención de 80 en una escala centígrada en establecer alianza con la fuerza política B, siendo que la B tiene la intensión de 50 de establecer una alianza política con A, es de esperar que la operación "**" que señala el grado de efectividad de la alianza arroje distintos resultados, según se conmuten los factores intervinientes es decir (A**B)≠(B**A) si la fuerza política A, le pide alianza a B u opuestamente cuando B, le pide alianza a A.

Comprensión Objetiva de la Población.-

La única manera en la que la multiplicidad de especímenes que congloba una población, pueda expresar sus **"Características de Generalidad"** es mediante los estadígrafos poblacionales. Los cuales son parámetros, generados por operaciones que tienen como factores a las características singulares realmente efectivizadas de las variables mediante las cuales se han definido los elementos de la población, adecuadamente transformados a patrones numéricos, **datos[73]**.

[71] Que la suma de las partes sea igual al todo.
[72] Que el orden en el que los atributos son agregados, no tenga influencia en el resultado.
[73] Observación precisa y puntual de una determinada realidad, como se ha referido en un anterior pie de página, téngase presente, que un punto puede ser comprendido, en espacios euclideos de distintas dimensiones (una o más) e incluso en espacios más

Cuando las mencionadas características individualizadas (reducidas a valores concretos) pueden ser conocidas en su totalidad o cuando al no ser conocidas de forma completa, para que puedan determinar mediante el uso directo de una formula, un resultado, se las infiere usando métodos que enseña la Inferencia Estadística[74]**. Entonces el objetivo principal de la Inferencia Estadística , es el de servir de instrumento de introspección a cualquier ciencia positiva,** como por ejemplo la Ciencia Política, para que comprenda de forma objetiva (como objeto científico) una población, respecto a la cual ha dirigido un interés particular. Aunque es trivial, es oportuno señalar que una misma población real, de acuerdo a los patrones singulares de comprensión teórica, que se ha usado en su objetivación, puede proyectarse a diferentes poblaciones científicas (cuyos elementos se entienden mediante un vector de características previamente acordadas).

Ilustración.- La población real de las mujeres, puede proyectarse a su entendimiento científico, mediante tres variables, su edad, su peso y su belleza, o con cuatro variables como ser, el lugar de su nacimiento, su estado civil, su edad y su salud, de acuerdo al interés por comprenderla.

Ilustración (I).- Los planetas del sistema solar, como población real, pueden proyectarse a su comprensión como población científica a un vector (tetra dimensional) que tenga por componentes su tamaño, su temperatura, su distancia al sol y su densidad u a otra población

---

complejos, en los cuales los ejes de proyección pudieran ser más complicados, en atención a la generalización de Hilbert.

[74] Y en determinados casos la propia lógica. El Sentido Científico, Diferente al Sentido Común. El primero que intuye sobre la base de una fundamentación y el segundo por la inmediación sensorial o por la tradición.

científica bidimensional que tenga por variables de definición, simplemente su distancia desde La Tierra y su masa.

Representación Formal De Una Población y Del Estudio Científico Positivo.-

En atención a las ideas enunciadas, una población se representa por:

$$P_{NxM} = \vdots\ x_{(i,j)}\ \vdots$$

Una matriz de dimensión *N x M* en la que N, indica el **Tamaño Poblacional**[75] y M, su Dimensión Objetiva[76], denominada también Dimensión Teórica[77]. Bajo la indicación que otorga esta forma de representación, puede afirmarse que **la población,** representa un espacio singular discreto[78]. **La población originalmente, representa la reunión de un conjunto de vectores independientes, cuya dimensión es el ámbito**

---

[75] Eventualmente infinito

[76] Una representación alternativa, expuesta en aras del interés pedagógico es:

	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$	$x_{1,4}$...	$x_{1,M}$
	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$	$x_{2,4}$...	$x_{2,M}$
	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	$x_{3,3}$	$x_{3,4}$...	$x_{3,M}$
	$x_{4,1}$	$x_{4,2}$	$x_{4,3}$	$x_{4,4}$...	$x_{4,M}$
	$x_{5,1}$	$x_{5,2}$	$x_{5,3}$	$x_{5,4}$...	$x_{5,M}$

P_{NxM} = ...

$X_{N-2,1}$	$x_{N-2,2}$	$x_{N-2,3}$	$x_{N-2,4}$...	$x_{N-2,M-1}$	$x_{1,M}$
$X_{N-1,1}$	$x_{N-1,2}$	$x_{N-1,3}$	$x_{N-1,4}$...	$x_{N-1,M-1}$	$x_{N-1,M}$
$X_{N,1}$	$x_{N,2}$	$x_{N,3}$	$x_{N,4}$...	$x_{N,M-1}$	$x_{N,M}$

[77] Entendiéndose, por teorización a la dimensionalidad que se le ha otorgado al objeto de estudio.

[78] Es un espacio, porque está constituido por un conjunto numerable de vectores, es singular, en atención a que cada uno de ellos es independiente de los demás y es discreto, atendiendo que se pueden numerar los elementos que lo conforman.

teoremático de su definición[79]. Sin embargo la reducción de su significado a una limitación teoremática, hace que algunos de los vectores que representan elementos singulares no sean entre sí linealmente independientes, por una característica intrínseca de la población. Es decir que entre dos de las variables que permiten su definición, exista una correspondencia lineal.

> **Ilustración.-** Se intenta describir los metales en referencia a su volumen temperatura y densidad; es de esperar que en la indicada reducción exista una correspondencia lineal entre al menos dos de las variables elegidas para la proyección real.

Un estudio científico positivo, en la fase de su acción, es la sucesión de actos mediante los cuales se intenta materializar al menos alguna de las siguientes intensiones:

a) **Descripción individual de las variables concretizadas**.- respecto a una característica poblacional, presente en el objeto de estudio, se pretende inferir parámetros que permitan apreciar su centralización, su dispersión, su sesgo, su curtosis, su mínimo y su máximo, aunque de acuerdo a la naturaleza de la variable que

[79] Si se aceptará en el conjunto de vectores que conforman la población, vectores linealmente dependientes, es decir, que algunos pudieran generarse de modo exacto a partir de la suma otros vectores componentes de la población, multiplicando todos los elementos de estos por un conjunto de parámetros respectivamente, se generaría un vicio de redundancia, que permitiría que la población pueda ser en todo caso reducida a un conjunto limitado de vectores.

se estudie, cualquier otra característica cuantificable[80] pudiera tener relevancia[81].

Ilustración.- Se verifica cual es la altura y el peso medio de los bolivianos varones

b) **Descripción de las Relaciones Entre las Variables.-** Se intenta establecer en el objeto de estudio, el vector general abstracto que define la población, relaciones causales "importantes[82]", sobre la base de correlaciones estadísticas siguiendo el principio de inducción[83].

Ilustración.- Se verifica con un determinado grado de confianza (el ejemplo es trivial) la relación entre el peso y la altura de los varones bolivianos.

c) **Verificación de Hipótesis.-** Se verifican mediante la contrastación con valores efectivamente acaecidos, hipótesis previamente establecidas[84], respecto a los valores de las medidas que signan las características descritas en el inciso a)

---

[80] En realidad, todas las características a efecto de su operacionalización (u operativización que significa que puedan ser susceptibles de operaciones estadísticas) son posibles de ser cuantificadas. Por lo que resulta una ingenuidad, sino una estupidez la **referencia a metódicas científicas no cuantitativas,** que avergonzando a nuestra universidad, como impostura, se pregonan en nuestro tiempo.

[81] Estas características han sido estudiadas en la primera parte de la presente obra "Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística Aplicada a la Ciencia Política" Tomo I, Rafael Torrez V.

[82] Se hace patente que las relaciones causales son importantes en aplicación del arbitrio del investigador, motivado en general por razones de orden práctico (la solución de algún problema socialmente importante) o puramente teórico.

[83] Las observaciones particulares que, con un grado máximo de error y con una confiabilidad suficiente permiten la construcción de una teoría general.

[84] Siguiendo el "principio Popperiano" de la Falsasión que establece que no deber rechazarle una hipótesis aceptada de forma corriente en la ciencia, si es que respecto a su falsedad no existe una prueba abrumadora. "Lógica de la Investigación Científica"

Ilustración.- Se verifica a un nivel de confianza de un 90% que la altura media de los varones bolivianos, se encuentra entre 1,66 y 1,70 metros.

d) **Inferencia de Relaciones Funcionales.-** Se proponen, con determinado grado de confianza, relaciones funcionales bajo estructuras matemáticas predefinidas.

Ilustración.- Se propone que la relación entre el peso y la altura de los varones bolivianos sigue la función $p = a_0 a^{\propto}$, expresión en la que $p = peso, a = altura$, siendo las otras constantes $a_0, \propto$ constantes características.

e) **Determinación de Parámetros Característicos.** Se verifica la aproximación de hipótesis estructurales (bajo formas matemáticas específicas) consecuencias interrelacionadas concretas.

Ilustración.- Se encuentra que las constantes características nombradas en el anterior punto son $a_0 = 1{,}66\ y\ \propto = 0{,}8$

Segmentación Poblacional.-

Se denomina segmentación poblacional, a la operación mediante la cual se particiona la Matriz Poblacional, en subconjuntos disjuntos, **subpoblaciones,** que unidos generan la población original[85], siguiendo el campo de definición discreto de una variable denominada Variable de Ordenación. La precitada variable, cuando es propuesta en una relación como causa, de una relación fenoménica construida sobre la base de los elementos poblacionales, deberá ser denominada Variable de Referencia o Variable de Estrato. Pudiera elegirse un criterio de partición más complejo, en atención a la extensión de la dimensión teórica de la

[85] Se ha discutido esta importante operación en la primera parte del texto.

población, sin embargo esa discusión escapa del alcance del presente texto[86].

> **Ilustración.-** Se pretende investigar la diferencia de la inteligencia de los hombres con la inteligencia de las mujeres, el objeto original que sostiene el estudio, ésta integrado por las variables, nivel de inteligencia, sexo, edad, raza, años de estudios regulares y nivel de ingreso. La variable de Estrato, en este caso será el sexo que particionará la población en los términos en los que se la ha definido.

Acotación Poblacional.-

Se entiende por acotación poblacional a la dupleta de "vectores extremos", **m** dimensionales (las dimensiones de la población como objeto científico) que tienen por componentes, a los máximos y a los mínimos, respectivamente, de cada una de las variables que definen la población.

De forma análoga, se entiende por **Amplitud Poblacional al vector de la misma dimensión que el mencionado en el anterior parágrafo que contiene todas las diferencias entre los máximos y los mínimos.**

Estructura de Una Población.-

Dada una partición poblacional, el tamaño de cualquiera de sus elementos no vacíos[87], $N_{r,j}$ dividido por el total de los elementos poblacionales[88], N, se denomina coeficiente particional, $C_{r,j}$,y representa

---

[86] Por ejemplo, elegir dos criterios de ordenación, uno primario y otro secundario, o la combinación lineal de dos o más criterios.

[87] Aquellos elementos particionales (subconjuntos particionales) que tienen al menos un elemento.

[88] En el caso de que la población sea finita.

la importancia fáctica del segmento respectivo, en el caso de que se defina la población mediante un único atributo, se corresponde a la frecuencia relativa de la variable estadística. El total de componentes no nulos, R_j, se corresponde al número de clases que contiene la población.

El vector integrado por todos los $C_{r,j}$ (de r= 0 a r= R), que es un conjunto de coeficientes particionales N_r/N, de R elementos, tal que R<N, define suficientemente respecto a la variable j, la estructura poblacional[89]. Se hace evidente que respecto a las M maneras en las que puede particionarse el objeto de estudio existe la posibilidad de construir una estructura poblacional.

Comprensión Abstracta de la Población.-

El conjunto numerable de vectores que constituye la población de estudio, en aras de la comunicación y de la comprensión de las relaciones que se producen entre sus variables, puede proyectarse a un ámbito no singular, en el que se asumen todas, o al menos alguna de sus variables componentes continuas, definidas en segmentos acotados de los números reales, que en general se corresponden a sus mínimos y a sus máximos, para el efecto de que se puedan aplicar las operaciones que posibilita el Cálculo Diferencial e Integral. Este escorzo que transporta al ámbito de las "Relaciones Funcionales" el sustrato poblacional, es posible incluso en el caso de variables dicotómicas o de las que resulten de una "Transformación Real[90]". La proyección indicada, ha permitido originalmente el surgimiento de la Física moderna, que expresa sus

[89] En verdad es suficiente y necesario el conocimiento únicamente de R_j-1, elementos, debido a que el último se encuentra relacionado linealmente con los otros.
[90] El significado de éste término se ha definido en la primera parte de la obra.

proposiciones mediante "Tesis Estructurales[91]" como las desarrolladas en "*Los Principios Matemáticos de la Filosofía Natural de Isaac Newton[92]",* y ha inspirado a A. Comte a fundar la Física Social, actualmente[93] denominada Sociología.

Significa lo anterior que la población, como objeto científico extenso y complejo, mediante la transformación de las variables que lo constituyen al ámbito de la diferenciación[94], puede expresarse como un objeto propiamente abstracto, predispuesto a ser asimilado por el intelecto superior[95].

El objeto científico, en el caso de una transformación completa, se expresa bajo el siguiente algoritmo:

$$0 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . x_m)$$

$$\forall x_{j \in [Min\, x_J \quad Max_{xj}]} \quad y \quad j = 1{,}2.3 \ldots\ldots\ldots M$$

Sin embargo, los campos de definición de las variables pudieran ser diferentes, sea por el desconocimiento anticipado de los valores extremos o porque existen razones para su modificación.

---

[91] Se las ha explicado en la primera parte de la obra "Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística Aplicada a la Ciencia Política" Tomo I, Rafael Torrez V.

[92] Publicada en 1687 siendo desde esa fecha el basamento principal de la ciencia contemporánea.

[93] Actualmente bajo la preeminencia organicista

[94] La referencia se encuentra en el apéndice ……….

[95] El entendimiento humano mientras se hace superior tiende a la abstracción e incluso a que sus conceptos puedan expresarse bajo un correlato matemático y no a la comprensión intuitiva mediante ejemplos (proposición pedagógica de Edda Valdivia Viuda de Martínez)

Evolución de la Comprensión Abstracta de Una Población.-

Repitiendo, en el afán de la comprensión de una población real, se la convierte en un objeto científico, reduciéndola a su interpretación mediante un número limitado de variables, sin embargo a medida que se desarrolla su comprensión, verificándose por ejemplo que algunas de las variables importantes que permiten el entendimiento de la población real no han sido incorporadas (**Sub determinación del objeto científico),** que la contrastación empírica ha indicado que otras son espurias (**Sobre determinación del objeto científico)** o que los rangos de definición no se eligieron de forma adecuada, es posible redefinir la proyección de la población original, mediante otro conjunto de variables o restringirla en su dominio vectorial, ese acto, inherente al avance de una investigación científica se denomina Evolución de la Comprensión Abstracta de la Población Investigada.

MUESTRA

En sentido lato, **Debe entenderse por muestra, a un subconjunto de elementos de la población que se eligen para posibilitar la inferencia de sus características generales[96]. Es decir mediante los n elementos que contiene una muestra, se intenta la comprensión de los N elementos[97] que conforman la población**, siendo obviamente N>n.

Una muestra, representa un sub espacio poblacional, que tiene la calidad de poder reproducir, con determinada confianza y bajo un error

[96] Características de Generalidad, como se las ha nominado en una anterior sección.
[97] Eventualmente vectores

acotado[98] la población, considerada como el espacio que se intenta conocer.

La muestra por sí no tiene ningún valor finalista, vale como medio que permite el conocimiento positivo de una población. Un signo epistémico importante es que, la comprensión de una población, supone la comprensión instrumental de la muestra que la representa, de lo que se colige que la comprensión "completa[99]" de la población, se logra, en los hechos de manera excepcional, únicamente cuando el tamaño de la muestra es igual al tamaño de la población. En cualquier otro caso, es decir, **cuando el tamaño de la muestra sea inferior al tamaño de la población, el conocimiento deberá reputarse como conocimiento inferencial positivo**. La comprensión completa de la población, no significa la comprensión exacta de la población original (real) que se pretende conocer, sino de una particular proyección que la representa, en todo caso siempre existirá en el ámbito científico positivo, la perfectibilidad del conocimiento de una población real, que representa la posibilidad del avance científico en un área determinada de la realidad natural o social.

Justificación del uso de muestras para la adquisición de conocimiento positivo.-

El conocimiento pleno de una población, implica la introspección total de todos sus componentes, si se define como y el número de los elementos

[98] El denominado "error", pudiera significar un vector, en el caso de que al mismo tiempo, se inquieran sobre características poblacionales relativas a varias calidades que han permitido la definición del objeto científico.

[99] Quiere expresar completa, mediante el conocimiento de todos sus elementos y no la comprensión absoluta del objeto científico sometido a la introspección del investigador.

de una muestra, en general esta introspección tiene un costo, C, marginal progresivo:

$$C = C(y) \qquad \frac{dC}{dy} > 0$$

$$\frac{d^2C}{dy^2} > 0$$

Es decir que crece progresivamente a medida que se agranda la muestra y entonces se intenta el conocimiento de la población mediante un número mayor de elementos, por los siguientes motivos, no aleatorios:

1) **Acceso Físico a los elementos Poblacionales**; es más fácil conocer los elementos que por el orden natural o social se encuentran al alcance del investigador respecto a aquellos que se encuentran más alejados. La indicada disponibilidad no solamente tiene un carácter toponímico.

2) Renuencia a la Introspección de los elementos con características volitivas.- En cualquier población humana se espera que existan elementos que no quieren ser sujetos de introspección (encuestados, o entrevistados), porque el indicado acto, de forma real o supuesta les pudiera acarrear perjuicio o simplemente por características sicológicas propias de una gran proporción de seres humanos (introvertidos, tímidos, etcétera)

Estos motivos económicos, implican que racionalmente para el conocimiento de una población, deba usarse una muestra, exceptuando los casos en los que no se presentan los avatares anotados o que el investigador pueda asumir los costos crecientes.

De cualquier forma, con **Criterio Económico Racional el Beneficio de la Investigación, a valor presente[100], en todo caso debiera ser mayor a su costo.**

Definición Estricta del Término Muestra.-

Se considera en sentido estricto que, únicamente la selección de la muestra, de forma aleatoria, mediante un sorteo en el que **todos los elementos poblacionales tienen la misma probabilidad de ser elegidos y que además las elecciones de los componentes muestrales sean independientes entre sí[101], permite la inferencia estadística,** es decir la predicción cabalmente científica de características relevantes de una población. Implica el predicado anterior, que al seleccionar uno a uno los componentes de una muestra de tamaño **n** de una población finita, se reponen, para cada nuevo sorteo (“Sorteo Con Remplazamiento) los elementos anteriormente elegidos[102]; por lo que puede definirse una muestra como:

“El conjunto de n elementos poblacionales, cuyas características relevantes (aquellas que las definen como objeto científico) se reflejan en vectores aleatorios independientes que tienen la propiedad de reproducir la misma función de distribución de probabilidad vectorial que define la población.”

Si los elementos poblacionales se circunscriben a una única variable de referencia la definición anterior se reduce a:

[100] El valor actualizado que producirá la investigación.
[101] Denominado Muestreo Aleatorio Simple.
[102] No siendo relevante esta acción en el caso de que la población sea infinita.

El conjunto de elementos extraídos aleatoriamente de una población, en aras de conocerla, que teniendo, respecto a una característica poblacional una idéntica función de distribución de probabilidad (escalar) son independientes entre sí.

A esta proposición se opone la interpretación de la relevancia que pudiera tener en algunos casos la selección pericial no aleatoria, que señala que son los expertos, quienes tienen la mejor idea de cuáles son los elementos poblacionales que tienen la aptitud de ser representativos, sin embargo las predicciones logradas mediante esta pericia, por su componente altamente subjetivo, no tienen la categoría de la selección aleatoria que se ha descrito. Es por ello que a quienes ofician de predictores políticos sin el uso de los métodos que enseña la inferencia estadística se les ha denominado “opinólogos” o en el mejor de los casos “analistas políticos”, que tanto han desprestigiado a la Carrera de Ciencia Política y Gestión Pública de la UMSA.

Número de Muestras Diferentes.-

El número de muestras diferentes, de cualquier tamaño, Cardinalidad Muestral (CM), que se pueden hacer de una población, está dado por la expresión:

$$CM = 2^N - 1$$

Que, no es el número de elementos del Conjunto Potencia[103] del espacio poblacional, al que se ha restado la unidad, en vista de que el conjunto que no contiene ningún elemento (el conjunto vacío), no puede ser considerado como una muestra.

[103] El que contiene todos los subconjuntos posibles de un conjunto original de N elementos.

Definido un tamaño, para la muestra, **n**, el número de muestras distintas que se pueden hacer en una población finita de tamaño N, está dado por el número binomial: $\binom{N}{n}$ es decir, es el total de combinaciones que se pueden hacer con N elementos, tomados de a n en la que el tamaño de la muestra fluctúa desde 1 al propio tamaño de la población, N. Se usa el orden combinatorio en virtud de que no interesa el orden en el que se hubieran recogido los elementos (precisamente como una característica de la aleatoriedad).

Si se considera que la población se encuentra, respecto a la variable j dividida en R_j estratos, el número de muestras diferentes, de tamaño **n**, es:

$$\prod_{r=1}^{r=R_j} \binom{N_{(r,j)}}{n_{(r,j)}}$$

Queda claro que: $\sum_{r=1}^{r=R_j} N_{(r,j)} = N$ y $\sum_{r=1}^{r=R_j} n_{(r,j)} = n$

Que el total de los elementos, agrupados en estratos, sea el tamaño poblacional y, que la suma de los elementos, considerados por estratos, sea el tamaño de la muestra.

Si el tamaño, de la muestra, coincide con el tamaño de la población, es decir, se ha utilizado la propia población en función de muestra, el estudio científico positivo se denomina exhaustivo (completo), sin embargo esta plena exactitud, no implica la invalidez del conocimiento muestral de una población ni que surjan otro tipo de distorsiones como las que se enumeran a continuación;

1) **Imperfección proyectiva**[104], al representarse el ser en su sentido original, por un conjunto de variables impertinentes, insuficiente, o sobre correlacionadas[105].
2) **Errores de transformación de las variables,** en el caso de que existan originalmente variables cuantitativas continuas, o cualitativas, que no se han proyectado adecuadamente al ámbito cuantitativo.
3) **Errores de medición de las variables,** si a tiempo de ser recogidos los valores de las variables, en el plano fáctico, existen fallas en la precisión de su medida, subjetivos, si son de responsabilidad del investigador y objetivos en el caso de que medie la voluntad del sustrato que se investiga[106]

Características Principales de la Muestra.-

Dos son las características más importantes de toda muestra, su Tamaño y su Estructura. **Se entiende por tamaño, al número de elementos poblacionales que contiene,** como se puede asimilar de la lectura del anterior punto **y por estructura** (de forma similar a como se entiende la

[104] Es claro que éste error, no es respecto al objeto científico, sino más bien en referencia a la cosa que se intenta conocer, por lo que es un error propiamente gnoseológico.

[105] Impertinentes, cuando no se han elegido adecuadamente las variables que manifiestan el ser real proyectado a objeto científico; Insuficiente (es gramaticalmente correcta la omisión del plural), si las variables elegidas para representarlo, no reflejan características importantes, en consecuencia de una intención y sobre correlacionadas, en la que dos o más variables, que constituyen el objeto científico presentan (en términos absolutos) un alto coeficiente de correlación lineal (criterio establecido por convención, en virtud a que restringe a esta forma, varias relaciones que in prima facie no debieran considerarse de ese tipo.).

[106] Como se ha manifestado anteriormente, al justificar el uso de muestras, en atención a las distorsiones que origina la voluntad del sujeto investigado (objeto para el investigador).

estructura de la población), **al vector que contiene los coeficientes, que relacionan, el número de elementos de un estrato particular** (definido como subconjunto componente de la población) **con el tamaño de la muestra.** En la decisión de cuál de las señaladas características es la más importante, el autor se pronuncia por la estructura.

Tamaño de la Muestra.-

Al mismo tiempo que se decide la realización de una investigación científica positiva[107], se define el máximo error que se está dispuesto a aceptar, ε, como resultado de la investigación, de modo tal que sus resultados, con una probabilidad denominada nivel de confianza, simbolizada por $1-\propto$, reflejen de forma fidedigna una característica poblacional[108]. Es notorio que mientras mayor exactitud se quiera dar a la investigación, y por tanto, se esté dispuesto a aceptar un menor error, mayor deberá ser el tamaño de la muestra[109]. Que la mayor confianza en los resultados de la investigación, trae aparejada un mayor número de elementos contenidos en la muestra. Que, además mientras más dispersos (diferentes entre sí) sean los elementos poblacionales, más grande deberá ser el número de observaciones contenidas en la muestra, a los niveles de confianza y de error predeterminados. El cálculo matemático del tamaño de la muestra (uno de los objetivos principales del presente texto), se desarrollará ulteriormente, luego de discutir la distribución de las medias muestrales, sin embargo resulta útil hacer

[107] Excepto en las investigaciones positivas rudimentarias, que lamentablemente incluso se aceptan en nuestra universidad como tesis de grado.
[108] Representa una cuestión económica, la predeterminación del máximo error y del nivel de confianza con la que se quiere investigar, en vista de que se espera en todos los casos un costo no nulo de recolección y procesamiento de los elementos muestrales y, en la mayoría de los casos, que los costos marginales sean crecientes.
[109] Dada una estructura suficientemente consistente.

notar que es incorrecto **afirmar (**como se lo hace de forma coloquial) **que el tamaño de la muestra, depende (o es proporcional) del tamaño de la población,** porque en realidad está directamente correlacionado de modo proporcionalmente cuadrático, ceteris paribus, con la dispersión poblacional.

Similitud Estructural de la Muestra.-

La semejanza entre la estructura de la población, definida por el vector de coeficientes estructurales poblacionales, que no tiene algún elemento nulo, y la estructura de la muestra, entendida por coeficientes análogos, algunos de ellos eventualmente nulos (cuando ningún estrato poblacional se encuentre integrando la muestra), se denomina **Similitud Cualitativa de la Muestra** (con la población) o también **Similitud Estructural de la Muestra**. Es de esperar que la investigación quiera, de ser posible (de acuerdo a la posibilidad que otorga el tamaño de la muestra), la máxima similitud estructural, y que en la mayoría de los casos, la prefiera al incremento del tamaño muestral. La discrepancia entre la estructura de la población y la estructura de la muestra, se denomina **"Sesgo Estructural de la Muestra"**, la medida de la indicada discrepancia y su efecto en el conocimiento de una población, será discutida posteriormente, aunque en primera instancia es fácil apreciar que una sesgo estructural marcado invalidará la capacidad predictora[110] de la muestra.

Acotación de la Muestra.-

Una muestra está acotada, por dos vectores m dimensionales, en las m variables que definen los n vectores que contiene, de modo que para cada

[110] La capacidad que tiene la muestra de predecir características de la población.

una de las variables, en un vector se muestre el valor máximo que las variables hubieron alcanzado y en el segundo el valor mínimo que adquirieron. Se hace evidente que la amplitud muestral (Rango de la Muestra) respecto de una o más variables, pudiera ser nula, cuando el valor máximo se corresponda con el mínimo. Por otra parte, los elementos más importantes de los vectores referenciados, son aquellos que pertenecen a las variables que han servido para estratificar la población.

Estadística Muestral[111].-

Se define como una Estadística Muestral, a cualquier función escalar o vectorial[112] que tiene por argumentos a los **n** vectores muestrales y, que no contempla, ningún parámetro desconocido. En cualquier caso, las Estadísticas Muestrales, son el resultado de las operaciones cuyos factores son los elementos muestrales; es de resaltar que, los valores que definen las estadísticas muestrales son plenamente determinísticos. Las más recurridas Estadísticas Muestrales son:

1) La media muestral, $\overline{x_{(n,j)}} = \frac{\sum_{r=1}^{r=R} x_{(r,j)} F_{x_{(r,j)}}}{n}$

En la que se han definido R estratos respecto a la variable j.

2) La variancía muestral , $V_{(x_{n,j})} = \frac{\sum_{i=1}^{r=R} (x_{(r,j)} - \overline{x_{(n,j)}})^2 F_{x_{(r,j)}}}{n-1}$, como predictora puntual e insesgada de la variancia poblacional.

[111] Se denomina también, Estadígrafo Muestral

[112] La función es escalar si se refiere a una característica específica contenida en una de las variables de definición y es vectorial si se determina u resultado escalar o vectorial, mediante el uso conjunto de los datos definidos por varias características.

3) El mínimo valor en la muestra, $x_{(min,j)}$ que adquiere la variable j, para todas las posibles j, que permiten la comprensión de la población como un objeto científico.
4) El máximo valor en la muestra, $x_{(max,j)}$ que adquiere la variable j, para todas las j mediante la cual se entiende el sustrato de estudio.
5) La Amplitud Muestral denotada por, A_n =($x_{(max,j)}$- $x_{(min,j)}$) entendida en la dimensión teórica en la que se definió el objeto de estudio.
6) Los k ésimos Momentos Muestrales definidos por, $\overline{\overline{x^k}}_{(n,j)} = \frac{\sum_{r=1}^{r=R} x_{(r,j)}^k F_{x_{(r,j)}}}{n}$

Que representan las medias de los valores muestrales, de cada una de las variables de definición del objeto científico elevados a la potencia k.

Valor Esperado de La Media y de la Desviación Típica Muestral.- Si de una población, finita o infinita, se toman muestras de tamaño **n**, sea cual sea ese tamaño y, sin importar las características de la población (la Distribución Poblacional), se cumple que:

1) **La media de las medias muestrales que en la posibilidad de su número son: $\binom{N}{n}$ [113],se espera sea igual a la media de la población, μ,** en símbolos matemáticos:

$$E(x) = E(\overline{x_n}) = \mu$$

[113] Como se propuso en una anterior sección.

Quiere decir, que si se extrae al azar un elemento de la población, se espera[114] que sea igual a μ e igualmente si se extraen muestras de tamaño **n**, debe esperarse, sin considerar el tamaño de **n,** que la media de cualquiera de esas muestras sea también μ.

2) La desviación típica de las medias muestrales de tamaño **n**, $\overline{\overline{x_n}}$ es igual a la desviación típica de la población, dividida entre la raíz cuadrada del tamaño de la muestra, $\sigma_{\bar{x}_n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

Lo anterior significa que, la desviación típica de las $\binom{N}{n}$ medias de las muestras de tamaño **n**, que se pueden realizar en la población, es menor que la desviación típica poblacional y esta minoridad se hace más notoria[115] a medida que aumenta el tamaño de la muestra, el presente y el anterior resultado, serán interpretados de una manera más exhaustiva en lo que continúa del presente capítulo.

Desigualdad de Chebyshev y Ley de Los Grandes Números.-

En 1867 , el matemático ruso Chebyshev demostró que, **la probabilidad de que una variable aleatoria, *x*, difiera de su media, $\boldsymbol{\mu_x}$, en menos de una cantidad determinada de desviaciones típicas, k, es igual o mayor a uno menos la inversa multiplicativa al cuadrado de la indicada cantidad** (siempre que la referida sea mayor o igual a uno)**:**

$$\boldsymbol{P(|x-\mu_x| < k\,\sigma_x) \geq 1-\frac{1}{k^2}}$$

[114] Se tiene la Esperanza Matemática, definida en la primera parte de la obra "Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística Aplicada a la Ciencia Política" Tomo I, Rafael Torrez V.

[115] La razón incremental es: *d*□*n*/*dn*=$-\sigma\, n^{-\frac{3}{2}}$.

Lo que por el teorema del complemento de probabilidades también puede escribirse de modo equivalente,

$$\boldsymbol{P(|x - \mu_x| \geq k\,\sigma_x) < \frac{1}{k^2}}$$

“La probabilidad de que una variable aleatoria x, distribuida de cualquier manera, difiera en más de k desviaciones típicas de su media poblacional es menor a la inversa cuadrática de k”.

Demostración Para Variables Aleatorias Discretas:

Sea x una variable aleatoria con media μ_x y variancia σ_x^2 de modo que en todo su recorrido (el campo de existencia de la variable aleatoria, C_x) tiene asociada una función de probabilidad, P_x, cuyos valores específicos, p_x , en todos los caos son estrictamente mayores que cero

Si definimos en el indicado campo un sub campo, V, respecto a la media, μ_x, cuyo tamaño sea mayor o igual que *k* veces la desviación típica de la variable, es decir:

$$V = |x - \mu_x| \geq k\,\sigma_x$$

Tendrá por complemento la vecindad:

$$\bar{V} = |x - \mu_x| < k\,\sigma_x$$

Por otra parte la variancia de la variable aleatoria es:

$$\sigma_x^2 = \sum_{C_x}(x - \mu_x)^2\, p_x$$

La que se puede escribir como la suma de las desviaciones cuadráticas que pertenecen a la vecindad y las desviaciones cuadráticas que pertenecen a su complemento:

$$\sigma_x^2 = \sum_{x\in(C_x\cap V)}(x-\mu_x)^2\, p_x + \sum_{x\in(C_x\cap \bar{V})}(x-\mu_x)^2\, p_x$$

Debido a que el segundo factor del lado derecho de la igualdad, evidentemente es mayor que cero, se colige que,

$$\sigma_x^2 \geq \sum_{x\in(C_x\cap V)}(x-\mu_x)^2\, p_x \geq \sum_{x\in(C_x\cap V)} k^2\sigma_x^2\, p_x = k^2\sigma_x^2 \sum_{x\in(C_x\cap V)} 1\, p_x$$

Estableciendo por transitividad el enlace entre los dos extremos,

$$\sigma_x^2 \geq k^2\sigma_x^2 \sum_{x\in(C_x\cap V)} p_x$$

Dividiendo ambos miembros de la desigualdad entre la variancia (positiva);

$$1 \geq k^2 \sum_{x\in(C_x\cap V)} p_x$$

Evaluando el valor de la probabilidad,p_x, y trasladando la constante k^2 al lado izquierdo de la expresión,

$$\frac{1}{k^2} \geq P(|x-\mu_x| \;\geq k\;\sigma_x)$$

Escrita de otra manera;

$$P(|x-\mu_x| \;\geq k\;\sigma_x) \leq \frac{1}{k^2}$$

Demostración para Variables Aleatorias Continuas:

Por la definición de la variancia de una variable aleatoria continua, se tiene:

$$V(x) = \sigma_x^2 \; = E((x-\mu_x)^2) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2\, f_x dx$$

La que puede escribirse mediante segmentos disjuntos que la integran como,

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\mu_x - k\,\sigma_x} (x-\mu_x)^2 \, f_x dx + \int_{\mu_x - k\,\sigma_x}^{\mu_x + k\,\sigma_x} (x-\mu_x)^2 \, f_x dx + \int_{\mu_x + k\,\sigma_x}^{\infty} (x-\mu_x)^2 \, f_x dx$$

Evidentemente implica,

$$\sigma_x^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu_x - k\,\sigma_x} (x-\mu_x)^2 \, f_x dx + \int_{\mu_x + k\,\sigma_x}^{\infty} (x-\mu_x)^2 \, f_x dx$$

$$\sigma_x^2 \geq k^2 \sigma_x^2 \left[\int_{\mu_x - k\,\sigma_x}^{\mu_x + k\,\sigma_x} 1 \, f_x dx + \int_{\mu_x + k\,\sigma_x}^{\infty} 1 \, f_x dx \right]$$

Igualando los extremos,

$$\sigma_x^2 \geq \; k^2 \sigma_x^2 \left[\int_{\mu_x - k\,\sigma_x}^{\mu_x + k\,\sigma_x} 1 \, f_x dx + \int_{\mu_x + k\,\sigma_x}^{\infty} 1 \, f_x dx \right]$$

Simplificando,

$$\frac{1}{k^2} \geq P(|x-\mu_x| \geq k\sigma_x)$$

Escrito de otro modo,

$$P(|x-\mu_x| \geq k\sigma_x) \leq \frac{1}{k^2}$$

Acotación, notoriamente útil, que indica que la desviación típica es una medida natural de la diferencia estocástica[116] entre una variable aleatoria y su media. y que de modo general, señala que la probabilidad de que una

[116] En términos de probabilidad.

variable difiera de su media decrece progresivamente a medida que la diferencia anotada se hace más grande[117], indicando indirectamente que regularmente, los valores de una variable aleatoria tienden a concentrarse en la vecindad de su esperanza matemática.

Por otra parte, aplicando el teorema del complemento[118] se puede enunciar de forma equivalente que,

$$P(|x-\mu_x| < \; k\sigma_x) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

Aplicando la Desigualdad de Chebyshev a las medias muestrales, consideradas como una variable aleatoria[119], se tiene por lo expuesto en el punto anterior:

$$\boldsymbol{P\left(|\overline{x}_n-\mu_x| \; \geq k\;\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}}$$

Y escogiendo como la proporción ***k*** el valor $\epsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma_x}$, en el que ϵ, representa el valor más alto que se puede aceptar como una estimación de la media poblacional, resulta,

$$\boldsymbol{P(|\overline{x}_n-\mu_x| \; \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\, n}}$$

Que en el paso al límite implica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\, n} \geq \lim_{n\to\infty} P[|\bar{x}_n-\mu_x|] = 0$$

[117] Precisamente, la relación, como lo muestra la segunda forma de expresar la desigualdad de Chebyshev, la relación es cuadrática.
[118] Expuesto en el primer tomo de la presente obra, página N°,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
[119] Como efectivamente lo son.

Que asegura que **a medida que aumenta el tamaño de la muestra[120], la probabilidad de que la media de la muestra difiera en un infinitésimo de la media de la población converge a cero, resultado conocido como la Ley de los Grandes Números.**

Ilustración.-

1) Acotar la probabilidad de que una variable aleatoria con media en 7 y desviación típica igual a 2 difiera de su media en más de 3 veces su desviación típica.

Solución:

a) Se pide calcular que la variable, sea mayor que 13 o menor a 1.

b) Lo anterior, puede expresarse como:

$$\boldsymbol{P(2) \; > 3\;(2) \leq \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}}$$

Distribuciones de las Estadísticas Muestrales.-

Habiéndose elegido, escogiendo aleatoriamente los elementos de una población, muestras de tamaño **n,** si se determinan $\binom{N}{n}$ posibles diferentes, que dan por resultado (habiéndose elegido una operación especial en la cual los señalados elementos son factores), una estadística muestral específica (no necesariamente diferente en su valor, para diferentes combinaciones posibles), en el caso de una población finita de

[120] Cuyos elementos se han elegido de forma independiente, de modo que en cada una de las elecciones la probabilidad de que cualquier elemento sea elegido es constante, como ocurre en los sorteos con reposición de los elementos o cuando la población es infinita.

tamaño **N,** cada uno de los resultados[121], puede ser considerado antes de que se realice una selección concreta, como el valor de una variable aleatoria que resulta de la composición funcional de los elementos que conforman la muestra, pudiendo en consecuencia determinarse para la generalidad de los elementos, en referencia a la operación (estadístico predefinido), **una función de distribución de probabilidad.**

En el caso de que la población sea infinita y, entonces, exista la posibilidad de generar infinitas muestras de tamaño **n,** es posible, sobre la base del baremo que permite la construcción de una función de densidad de probabilidad, realizar algo análogo y, de esta manera, generar la respectiva distribución de probabilidad, denominada para éste caso **Distribución Teórica del Estadístico Muestral respectivo**. Opuestamente, en la situación de que la población sea pequeña, se puede encontrar con precisión la probabilidad de ocurrencia de cada valor del estadístico y entonces, reuniendo todos los elementos posibles del conjunto, lograr una **Función de Distribución Experimental**.

Las más importantes estadísticas muestrales, sobre cuyas, se basará lo central de esta exposición, como se ha dicho son, la de la media y de la variancia muestrales, como predictoras, respectivamente, de las correspondientes medias y variancias poblacionales, en el caso de realizarse una estimación de los respectivos parámetros.

Distribución de las Medias Muestrales.-

Por lo inmediatamente expuesto, se puede deducir que La Distribución Muestral representa una estadística que está en función del tamaño de

[121] Resultante como es evidente de la elección de elementos muestrales, mediante un sorteo sin sustitución.

la población, del tamaño de las muestras y de la manera en la que se seleccionan éstas, en lo siguiente, en atención pedagógica, únicamente mediante el muestreo aleatorio simple que se ha detallado[122].

En el sentido referenciado, en primera instancia, a modo de introducirnos en el meollo del problema, resulta fácil avizorar, por la característica reproductiva[123] de la Función De Distribución Normal que, si de una **población distribuida normalmente** se extraen muestras de cualquier tamaño posible, las medias de estas muestras, se distribuirán también normalmente:

1) Teniendo por esperanza matemática, la esperanza matemática que tiene cualquier elemento poblacional[124],
2) Y, por desviación típica, la desviación típica de la población, dividida entre la raíz cuadrada del tamaño de la muestra.

Sin embargo, cuando el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande, en la práctica, mayor a 30 elementos, aun cuando los elementos que la constituyen no se distribuya de acuerdo a una Función de Densidad de Probabilidad Normal, puede considerarse que la distribución de las medias muestrales, se convierte en asintótica[125] a una distribución normal, (se distribuye de forma muy parecida a una distribución normal y cada vez más a medida que aumenta el tamaño de la muestra) con los valores de la media y la desviación típica que se han precitado, este

[122] En la referencia N° 34 (revisar)
[123] La agregación algebraica de funciones de densidad de probabilidad normales, siempre genera otra normal.
[124] Como se indicó en la sección anterior
[125] Se aproxima indefinidamente a una distribución normal a medida que se hace más grande el tamaño de la muestra de la que se toma la media.

resultado es conocido como el **Teorema del Límite Central**[126], que en algoritmos matemáticos implica: $\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{x_{n-}u}}{\sigma/n} = Normal(0,1)$

[126] La demostración del teorema expuesto es relativamente sencilla mediante el uso de Funciones Generadoras de Momentos, que en forma general serán expuestas.

Demostración de la Convergencia Normal (Teorema del Límite Central).

Dado un conjunto de n datos $(X_1, X_2, X_3, X_4, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . X_n)$ elegidos de una población mediante un sorteo con reposición de modo tal que cualquiera de los elementos tenga la misma probabilidad de ser elegido de forma independiente a los otros,

Su suma será

$$Z = X_1 + X_2 + X_3, X_4, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . + X_n$$

En la que la Esperanza Matemática de Z es

$$E(Z) = \frac{E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4),\dots\dots\dots\dots E(X_n)}{1} = nE(X_i) = n\mu$$

Expresión en la que i, representa cualquier elemento de la muestra y μ, la media poblacional, por lo que se tiene expuesto en el inciso 1), del presente apartado.

Por otra parte la variancia de Z, en virtud a la independencia de las observaciones que hace que las covariancias sean cero, adquirirá el valor:

$$Var(Z) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + \cdots \dots .. Var(X_n) = n\sigma^2$$

Consiguientemente, la Variable aleatoria Z, tipificada (A la que se le resta su media y se le divide su desviación típica) será representada por:

$$Z_{Tipificada}^{en\ n} = \frac{Z-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Que tiene por Función Generadora de Momentos:

$$E\left(e^{tZ_{Tipificada}^{en\ n}}\right) = E\left(e^{t(\frac{Z-n\mu}{\sigma\sqrt{n}})}\right)$$

$$= E(e^{t\frac{(X_1-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}} e^{t\frac{(X_2-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}} e^{t\frac{(X_3-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}} e^{t\frac{(X_4-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}} \dots \dots \dots \dots . e^{t\frac{(X_n-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}})$$

$$= E(e^{t\frac{(X_1-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}})E(e^{t\frac{(X_2-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}})E(e^{t\frac{(X_3-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}}) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . E(e^{t\frac{(X_n-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}})$$

$$= \left(E(e^{t\frac{(X_1-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}})\right)^n$$

Desarrollando la expresión anterior, mediante la serie de Taylor

$$= E\left(1 + \frac{t(X_1-\mu)^1}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{t^2(X_1-\mu)^2}{2\sigma^2 n} + \frac{t^3(X_1-\mu)^3}{6\sigma^3\sqrt{n^3}} \dots \dots .\right)$$

Que la diferencia entre las medias muestrales y la media poblacional (que tienen la misma esperanza), dividida entre la desviación típica de la media muestral, tiende a distribuirse de acuerdo a una Normal Típica[127], a medida que se incrementa el tamaño de la muestra.

Ilustración: Si de una población que se distribuye de cualquier manera, con media igual a 8 y desviación típica igual a 3, se forman todas las muestras posibles de tamaño 49, la nueva distribución de la medias muestrales, seguirá una distribución próxima a la normal, con media igual a 8 y desviación típica igual a 3/7. Obviamente, la diferencia de las medias muestrales, con su media (la media poblacional igual a 8) se distribuirá normalmente con media en 0 y desviación típica en 3/7.

$$= E(1) + E\left(\frac{t(X_1-\mu)^1}{\sigma\sqrt{n}}\right) + E\left(\frac{t^2(X_1-\mu)^2}{2\sigma^2 n}\right) + E\left(\frac{t^3(X_1-\mu)^3}{6\sigma^3\sqrt{n^3}}\right) \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}E(X_1-\mu) + \frac{t^2}{2\sigma^2 n}E(X_1-\mu)^2 + \frac{t^3}{6\sigma^3\sqrt{n^3}}E(X_1-\mu)^3 \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + 0 + \frac{1}{n}(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}\frac{E(X_1-\mu)^3}{\sigma^3\sqrt{n}}t^3 + \frac{1}{4!}\frac{E(X_1-\mu)^4}{\sigma^4 n}t^4 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{n}k\ ,$$

denominando k a la expresión entre paréntesis

La que cuando la muestra tiende a ser infinitamente grande, puede expresarse:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Sin embargo, en el límite, únicamente el componente $\frac{t^2}{2}$ no se hará cero, por lo que la Función Generatriz de Momentos, $E\left(e^{tZ^{en\ n}_{Tipificada}}\right) = \frac{t^2}{2}$, lo que comprueba que la distribución de las medias muestrales, tipificada, tiene la misma función generatriz de momentos que la variable aleatoria normal típica, **motivando la conclusión de que tienen también la misma distribución de probabilidad.**

[127] Con media cero y desviación típica igual a uno (también denominada "Estándar")

Una consecuencia necesaria de la proposición anterior es que, dadas dos muestras independientes de tamaño n_1 y tamaño n_2, suficientemente grandes[128], la diferencia de las respectivas medias muestrales, cuya desviación típica es: $\sigma_{\overline{(x}_{n1}-\bar{x}_{n2})}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n1}+\frac{\sigma_2^2}{n2}}$

También se distribuye bajo una normal típica.

Ilustración: Si de una población, con media 15 y desviación típica igual a 2, se toman dos muestras, la primera de tamaño 64 y la segunda de tamaño 100, la desviación típica de la variable aleatoria constituida por la diferencia de las medias de la primera muestra y las medias de la segunda, será igual a 0.1025, siendo su media, obviamente igual a 0.

Distribución de la Razón entre la Variancia Muestral y la Variancia Poblacional, Amplificada por el Tamaño Corregido de la Muestra.-

La distribución del Estadígrafo $\vartheta = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_x^2}$

presenta una especial importancia en virtud de que con él, se pueden realizar inferencias respecto a la desviación típica muestral. El precitado estadístico, sigue una distribución Chi Cuadrado[129] con un grado menos

[128] En las que n_1 y n_2 tengan más de 30 elementos.

[129] El estadístico Chi Cuadrado, con n-1, grados de libertad, que será nuevamente discurrido, con mejores elementos teóricos en el capítulo III, que pertenece a la familia de las funciones Gamma, se constituye a partir de la suma de n-1 variables aleatorias normales independientes, elevadas al cuadrado. Su campo de existencia es de cero a infinito positivo. El resultado anotado, es fácil de demostrar mediante el uso de la función generadora de momentos, a la que se hizo alusión anteriormente, que origina en el paso a la continuidad una función de densidad de probabilidad (llamando a los Grados de Libertad *v,* a efecto de facilitar la escritura):

$$f(x) = \frac{x^{\frac{v}{2}-1}\, e^{-x/2}}{2^{\frac{v}{2}}\gamma(\frac{v}{2})}$$

de libertad que el tamaño de la muestra, $\aleph^2_{(n-1)}$. siempre que la población de la que se toma la muestra tenga una distribución suficientemente próxima a la normal.

Que tiene por media *v* y desviación típica $\sqrt{2v}$

En la función de densidad de probabilidad reseñada: $\gamma\left(\frac{v}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{v}{2}-1}\, e^{-\frac{v}{2}}\, \frac{1}{2}\, dv$, una función gamma, que indica claramente que la Chi Cuadrado, pertenece a esa familia de funciones de densidad de probabilidad. También es notorio que a medida que el tamaño de la muestra se hace más grande, la función Chi Cuadrado, tiende a ser normal.

La reducción de un grado de libertad en el estadístico anotado deviene del hecho de que al construir la media de las variables de las que ulteriormente se encuentra su desviación típica, se hace que la última sea linealmente dependiente de las anteriores. Es decir que, si se conoce la media y el valor de la n-1 variables, la faltante está exactamente determinada.

Capítulo Tercero

ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS POBLACIONALES

INTRODUCCIÓN

Es una pretensión de toda persona que busca el conocimiento positivo, el inquirir respecto a los valores generales o a los valores futuros inherentes a un conjunto de datos que permiten la identificación de una población[130] o que permiten comprenderla de modo objetivo[131].

La comprensión suficiente[132] de una población asume que los elementos de la indicada, en cuanto representa un objeto real proyectado en el tiempo y en el espacio, se distribuyen bajo una determinada ley de probabilidad, con una específica función de cuantía de probabilidad o función de densidad de probabilidad, según sea el caso discreto o continuo, respectivamente. Se conoce de forma genérica una población; sea porque sobre la base de que la experiencia de casos homólogos nos induce a ese presupuesto gnoseológico o porque como una proposición teoremática se la ha asumido como una asunción "realista", al determinarse, aplicada a los elementos de la población, una forma

[130] Un género identificado ora en la naturaleza u ora en la sociedad.
[131] Se ha explicitado este concepto en el capítulo anterior.
[132] Desde la perspectiva estadística.

funcional específica, ignorándose, sin embargo el valor de los parámetros que permiten que se identifique la función de forma exacta[133].

Por lo que, mediante la estimación de los parámetros poblacionales, se intenta conocer con el menor error y con una alta confianza, cuáles serían los valores de los parámetros poblacionales principales, que precisarían la función asumida de forma general, además, cuáles pudieran ser los valores en los cuales algunos de sus elementos (en dependencia de los otros) se efectivizarían en el futuro o (extendiendo la definición) eventualmente fuera del rango de los datos conocidos, cuáles serían los valores que adquiriría una determinada variable[134] que define el objeto científico de una investigación, de modo consistente con otras variables complementarias, que son manifiestas por haber sido mensuradas.

Ilustración: En la ciencia política, asumiendo que la predilección por un candidato (que sea el más preferido de todos los que compiten en un determinado campo político) es una variable aleatoria que depende del tiempo en el que ha ejercido funciones de gobierno y que además (como proposición teoremática) sigue una distribución normal, cuya media y desviación típica se desconocen, el objeto científico que se pretende comprender (con una noción previa de normalidad), quedará plenamente identificado cuando se conozcan la media y la desviación típica de la

[133]. Se conoce la forma pero no se conoce como esta forma se manifiesta en concreto. Como ilustración, conocemos que la duración de una marca de focos, se distribuye bajo una forma exponencial, es decir con la función de densidad de probabilidad: $f(x) = \theta e^{-\theta\, x}$, el objetivo de la estimación, será la determinación del valor específico del parámetro θ.

[134] Una serie temporal Escalar o vectorial, que será abordada ulteriormente.

función de densidad de probabilidad que representa el evento azaroso expresado[135].

El presente capítulo, tiene por objeto, la discusión y el desarrollo de los métodos y las técnicas estadísticas que permiten la inferencia de los parámetros principales de una población, conocimiento que se hace posible mediante la determinación de sus principales estadígrafos, como lo son la media, la variancia, la desviación típica y la proporción de un conjunto de elementos específicos que permiten su segmentación[136]. Bajo la egida de esa pretensión, se avizora la posibilidad de estimar, las diferencias entre los parámetros mencionados, entre dos o más poblaciones y también la diferencia de los indicados en relación a una forma peculiar esperada, sea por razones puramente teóricas o señaladas por anteriores experiencias.

Aspectos Generales de la Estimación

La estimación estadística, se clasifica en:

1) estimación puntual

2) en estimación por intervalos de confianza.

La estimación puntual, consiste en la proposición de un estadístico [137] como predictor de un parámetro poblacional, así por ejemplo, se puede proponer que la media muestral sea un estadístico, un valor preciso y

---

[135] En realidad, no existe conocimiento científico que no hubiera sufrido de una limitación previa, en este caso, la indicada limitación, está representada por la asunción de una forma específica de dependencia de la preferencia por el candidato, con el azar, que se asume "normal".

[136] La partición relevante de una población.

[137] Valor o función de los elementos muestrales

concreto, que permita avizorar la media poblacional o que. la función $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(x_{i-\bar{x}})^2}{n-1}$ sea una predicción suficientemente adecuada de la variancia de la población. El defecto de la predicción puntual consiste en la imposibilidad de poder calcular la probabilidad de que nuestro predictor puntual (el estadístico muestral) sea suficientemente próximo al verdadero valor de la población además del tamaño de la eventual diferencia entrambos.

En realidad, incluso si se asumiera que la diferencia entre el predictor y el verdadero valor poblacional, pudiera ser lo más pequeña posible, aún en el infinitésimo de esa diferencia existirían una infinidad de posibles resultados, cuya probabilidad de ocurrencia, de uno de ellos en concreto ---en aplicación de la definición clásica de la probabilidad[138]--- sería cero. Sin embargo, a pesar de este defecto, muchas veces, se recurre a esta clase de estimación, en aras de no hacer demasiado extremo el tráfago del cálculo.

PROPIEDADES DESEADAS DE UN ESTIMADOR

Existiendo varias posibilidades de elección entre los distintos estadísticos, funciones escalares o vectoriales que tienen por elementos a los valores de los datos de la muestra aleatoria, para la elección del mejor estimador puntual se siguen los siguientes criterios:

a) Criterio de **Insesgamiento:** Un estimador puntual es insesgado, cuando su esperanza matemática, es igual al parámetro

[138] $P(x) = \frac{Casos\ Favorables}{Casos\ Totales}$, bajo la asunción de que todos los eventos elementales son igualmente probables.

poblacional que se pretende estimar, es decir, dado el estimador $\bar{\theta}$, que representa una función de variable aleatoria[139],

$$E(\bar{\theta})=\theta$$

En la que θ representa el **verdadero valor poblacional, a la que la estimación apunta con precisión estadística.**

b) Criterio de **Consistencia:** Un estimador puntual es consistente, si a medida que se incrementa el tamaño de la muestra que genera los elementos de la función mediante la cual se lo genera, la probabilidad del error de estimación, **entendido como la diferencia entre el valor del estimador y del parámetro poblacional estimado,** tiende a cero.

$$\lim_{n\to\infty} P(\bar{\theta}-\theta) = 0$$

Significando que una muestra mientras sea más grande, hace posible una mejor estimación, (más precisa), esperándose que una muestra pequeña produzca un mayor nivel de error.

c) Criterio de **Eficiencia:** Un estimador puntual, $\bar{\theta}$, insegado, es más eficiente que otro estimador puntual,$\bar{\vartheta}$, insesgado, cuando éste tiene una menor variancía. Es decir, que en la distribución del primer estimador, el grado de dispersión de los elementos aleatorios que lo representan es menor en referencia a los elementos que componen la distribución del segundo.

[139] Cuyos argumentos son los datos de una muestra elegida de forma azarosa.

La razón entre las desviaciones típicas de los estimadores, R= $\sqrt{\frac{Var(\bar{\theta})}{Var(\bar{\theta})}}$, representa cuantas veces es más eficiente el primero, respecto al segundo[140].

d) Criterio de **Linealidad:** Se denomina lineal a un estimador cuya estadística que lo constituye, adquiere la forma de una función lineal de los datos muestrales[141]:

$$\theta = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \gamma_n x_n = \sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i x_i$$

Expresión en la que las $\gamma_i$son números reales.

Un concepto importante denominado de **Suficiencia** del estimador, ha sido desarrollado por R.A. Fisher, y sostiene que un estimador es suficiente, si en su construcción se utiliza, toda la información que contiene la muestra, en relación a los parámetros que se pretende estimar, siendo por lo tanto irrelevante, en la estimación de los mencionados, la información que proporciona la distribución de probabilidad de cualquier otro estimador, el estudio más acendrado del concepto referenciado, excede el nivel de exposición del presente texto. Sin embargo nos hace colegir, inter alia, la idea de que en un estadístico

[140] La eficiencia absoluta de un estimador, puede ser determinada mediante la Desigualdad de Cramer-Rao que señala que para todo estimador insesgado, su variancia es mayor o igual a la inversa de la esperanza matemática de la derivada logarítmica de la función de densidad de probabilidad de los datos, respecto al parámetro que se pretende estimar, multiplicado por el número de datos.

$$Var(\bar{\theta}) \geq \frac{1}{n\, E\left[\left(\frac{\partial logf}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

[141] Una combinación lineal de los elementos contenidos en el conjunto muestral

específico (ni siquiera signado en la linealidad) no todos los elementos pudieran tener la misma importancia.

MÉTODOS DE ESTIMACIÓN PUNTUAL

Los métodos matemáticos, más usados, de determinación de estimadores puntuales son:

a) De Máxima Verosimilitud
b) Mínimos Cuadrados Ordinarios
c) De los Momentos
d) De la Chi Cuadrado Mínima

Se desarrollarán en el presente texto, en razón de su nivel, únicamente el primero.

MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

Se determina un estimador de máxima verosimilitud, cuando dado un conjunto de valores muestrales predeterminados, que definen una función de distribución de probabilidad conjunta, dependiente de un parámetro θ, y denominada "Función de Verosimilitud", la aludida, se maximiza, mediante la adecuada elección del indicado parámetro. Es decir, implica que se haga máxima la probabilidad de que ocurran los valores muéstrales referenciados, a un valor especificado del parámetro.

Al ser, como un requisito del muestreo aleatorio, la selección de cada uno de los elementos de la muestra idéntica e independiente, la función de distribución de probabilidad conjunta, en el caso discreto puede ser representada por el producto de las probabilidades marginales, entonces:

$$v = \prod_{i=1}^{i=n} P(x_i, \theta)$$

Que en el caso continuo tomará la forma:

$$v = \prod_{i=1}^{i=n} f(x_i, \theta)$$

Es decir la productoria de las n funciones de distribución de probabilidad marginal que se generan a partir de la función de densidad de probabilidad conjunta, que a su vez representa la función de verosimilitud, dependiente del parámetro θ que se debe maximizar.

De esta manera, en el caso continuo[142], se implica la maximización de v, que, por las condiciones generales de maximización, consiste en encontrar el valor que hace que:

$$\frac{dv}{d\theta} = 0$$

Denominada condición de maximización de primer orden y,

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} < 0$$

Llamada condición de maximización de segundo orden.

Ambas, de forma conjunta, necesarias y suficientes para la determinación del estimador de máxima verosimilitud.

[142] Que por emulación puede ser utilizado incluso para funciones de distribución discretas.

DETERMINACIÓN MÁXIMO-VEROSIMIL DEL ESTIMADOR PUNTUAL DE LA MEDIA POBLACIONAL

De una población distribuida normalmente, con variancia conocida, se toma una muestra de tamaño n; sobre esa base, se encuentra el estimador de máxima verosimilitud de la media poblacional, bajo la siguiente metódica:

Sea: $X_i= (X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots X_n)$ tal que i= 1, 2, 3…………………n

Un conjunto de n datos seleccionados de forma aleatoria (mediante muestreo aleatorio simple) de la población. La densidad de probabilidad conjunta de la ocurrencia simultánea de los referidos está definida por la función de probabilidad conjunta, en la que θ, representa la media de la población multinormal :

$$f\left(X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . X_{n,}, \theta\right) = MN(n+1)$$

Una variable aleatoria multinormal, dependiente de los valores de los datos que la integran además del parámetro θ.

La precitada función vectorial de dimensión n+1, puede ser representada por;

$$\text{MN(n+1)=} f(X_1,\theta)f(X_2,\theta)f(X_3,\theta)f(X_4,\theta) \ldots \ldots \ldots . . f(X_4,\theta)$$

El producto de n funciones marginales de probabilidad, en virtud del referenciado método de selección aleatoria[143].

[143] Que implica que cada uno de los datos tiene la misma probabilidad de ser elegido y que una selección es independiente de cualquier otra.

En atención al conocimiento de la forma especial de la distribución de los datos, señalados en la normalidad, se puede escribir:

$$MN(n+1) = \left(\frac{1}{\sqrt[2]{2\pi\sigma^2}} e^{-\left.(X_1-\theta)^2\right/2\sigma^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt[2]{2\pi\sigma^2}} e^{-\left.(X_2-\theta)^2\right/2\sigma^2}\right) \ \ldots \ldots \ldots \left(\frac{1}{\sqrt[2]{2\pi\sigma^2}} e^{-\left.(X_n-\theta)^2\right/2\sigma^2}\right)$$

$$MN(n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

Aplicando a ambos lados de la expresión, logaritmos naturales[144]:

$$Ln\ MN(n+1) = Ln\ (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

$$Ln\ MN(n+1) = Ln\ MN(n+1)(x_i, \theta)$$

$$Ln\ MN(n+1) = -\frac{n}{2} Ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}$$

Función de verosimilitud que debe ser maximizada, respecto al parámetro poblacional θ, desconocido.

Por la condición de primer orden de la maximización y derivando de forma implícita.

$$\frac{1}{MN}\frac{dMN}{d\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)}{\sigma^2} = 0 \qquad *$$

$$\rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i - \sum_{i=1}^{i=n} \theta = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = n\theta$$

[144] Una transformación monótona estrictamente creciente.

Por lo que, $\theta = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}$, la media muestral, representa el estimador de máxima verosimilitud de la media poblacional.

Verificada la condición de maximización de segundo orden, del enunciado signado con asterisco.

$$\frac{\partial^2 MN}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sigma^2} < 0$$

DETERMINACIÓN MÁXIMO-VEROSÍMIL DEL ESTIMADOR PUNTUAL DE LA VARIANCIA POBLACIONAL

Bajo el supuesto de que la población se encuentra distribuida normalmente, implica que cada extracción aleatoria tiene una función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = (\frac{1}{\sqrt[2]{2\pi\sigma^2}} e^{-(X_{\square}-\theta)^2 / 2\sigma^2})$$

Si se toma una muestra aleatoria, de tamaño n de la precitada población, **de la que se conoce la media,** la función de densidad de probabilidad conjunta será:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . . x_n, \sigma)$$

Que por la identidad e independencia de las extracciones puede escribirse como:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots \ldots . . x_n, \sigma) =$$

$$f(x_1, \sigma)\, f(x_2, \sigma)\, f(x_3, \sigma) \ldots .\, f(x_n, \sigma)$$

La productoria de n funciones marginales, que bajo la especificidad normal tiene la forma:

$$MN(n) = (\frac{1}{\sqrt[2]{2\pi\sigma^2}} e^{-{(X_1-\theta)^2}/{2\sigma^2}}) (\frac{1}{\sqrt[2]{2\pi\sigma^2}} e^{-{(X_2-\theta)^2}/{2\sigma^2}}) \dots (\frac{1}{\sqrt[2]{2\pi\sigma^2}} e^{-{(X_n-\theta)^2}/{2\sigma^2}})$$

Que por propiedades de los exponentes, puede reducirse a:

$$MN(n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

Que mediante el uso de logaritmos naturales, admite la transformación monótona:

$$Ln\ MN(n) = Ln(\ (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}})$$

Expresión equivalente (por las propiedades de los logaritmos) a:

$$Ln\ MN(n) = -\frac{n}{2} Ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}$$

Que maximizando, implícitamente, respecto a σ^2, origina:

$$\frac{1}{MN(n,\sigma^2)} \frac{dMN}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{2\pi\sigma^2}\ 2\pi + \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^4}$$

$$\frac{1}{MN(n,\sigma)} \frac{dMN}{d\sigma} = -\frac{n}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^4}$$

$$\frac{dMN}{d\sigma} = (-\frac{n}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{\sigma^4})(\ (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}})$$

Que se hace cero cuando lo hace su primer factor,

$$-\frac{n}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{\sigma^4} = 0$$

E implica: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{n}$

Simbolizada por:

$$\ddot{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{n}$$

Como estimador Máximo verosímil.

ESTIMACIÓN INSESGADA DE LA VARIANCIA POBLACIONAL.-

Si bien el estimador máximo verosímil de la variancia poblacional representa una de las estimaciones más importantes de este parámetro, adolece de sesgo, por tal motivo como una estimación no sesgada de la variancia poblacional, se usa el estimador[145]:

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i-\theta)^2}{n-1}$$

El que se relaciona con el estimador máximo verosímil mediante el cociente $\frac{n}{n-1}$, es decir que el estimador insesgado de la variancia poblacional es el estimador máximo verosímil, multiplicado por la referida razón,

$$\widehat{\sigma^2} = \ddot{\sigma}^2 \frac{n}{n-1}$$

Estimación de los Valores Poblacionales Mediante Intervalos de Confianza.-

A pesar de que, mediante la estimación puntual, es posible inferir de forma relativamente sencilla el valor de un parámetro que representa el verdadero valor poblacional (en la generalidad de los casos desconocido) mediante operaciones previamente definidas, realizadas con los datos

[145] Recurrentemente mal llamada variancia muestral, cuando en realidad el estimador máximo verosímil, se corresponde con el anotado parámetro.

muestrales[146], mediante la señalada metódica, no se puede precisar la probabilidad de que estos parámetros, representen al verdadero valor de la población[147]. En atención al óbice reseñado y en aplicación de las propiedades de la distribución de las medias muestrales, expuestas en el capítulo anterior, se ha desarrollado el método de estimación mediante intervalos de confianza, cuyo significado general se presenta a continuación.

Un intervalo de confianza, es un segmento de los números reales, que con una determinada probabilidad (denominada nivel de confianza) contiene el verdadero valor de un parámetro poblacional, en otros términos:

Dada una población, definida por $\mathbf{\Omega}$ la cual puede ser comprendida de forma suficiente de modo objetivo, por γ parámetros, estadígrafos poblacionales, un intervalo de confianza de cualquiera de ellos como por ejemplo el parámetro γ_i , es un segmento $[\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}]$**,** que con la probabilidad **1-**$\propto$, contiene el referido parámetro. Complementariamente con una probabilidad $\propto$ es posible que dentro de los límites del intervalo referenciado, por los efectos del azar[148], no se encuentre el verdadero valor del parámetro que (conjuntamente a otros) define estadísticamente[149] y entonces objetivamente, la población.

[146] Como se dijo anteriormente denominadas "Estadísticas".

[147] Excepto si se trata de un proceso de censo en el cual se tiene "demostrado" que no existe error, en este caso es cuestionable, (cuando se ha identificado la muestra con la población) que el proceso pueda denominarse aleatorio y entonces, que deban aplicarse las reglas de la probabilidad.

[148] Independientemente de cuan bien realizada estuviere la investigación científica

[149] El término Definición Estadística, significa que dado un significado general, previamente establecido para un parámetro, representa el grado respecto a este significado numérico en el cual se presenta la población.

En atención a los objetivos del texto, que intenta enseñar la construcción de los parámetros más utilizados en la Ciencia Política, al menos en sus aspectos matemáticos fundamentales, se presentan los intervalos de confianza de:

a) La Media Poblacional (con muestras grandes)
b) La media Poblacional (con muestras pequeñas)
c) La Variancia Poblacional
d) La Desviación Típica Poblacional
e) La Proporción de Elementos Con un Atributo Determinado en Una Población
f) La Diferencia de las Medias que tienen dos Poblaciones Distintas
g) La Diferencia de las Proporciones de un Elemento Entre Dos Poblaciones Distintas

Intervalo de Confianza de la Media Poblacional (para muestras grandes).-

Si de una población infinita[150], distribuida de cualquier manera, se toma una muestra mayor a 30 observaciones, se puede afirmar suficientemente que el intervalo que contiene la media poblacional, con una probabilidad 1-∝, puede aceptarse suficientemente[151] que ésta dado por:

$$\left[\overline{x_n} - \frac{Z_{1-\frac{\propto}{2}}}{\sqrt{n}}\,\hat{\sigma} \qquad \overline{x_n} + \frac{Z_{1-\propto/2}}{\sqrt{n}}\,\hat{\sigma}\right]$$

[150] O de una finita con remplazamiento
[151] Porque se encuentra suficiente asintotización con la media.

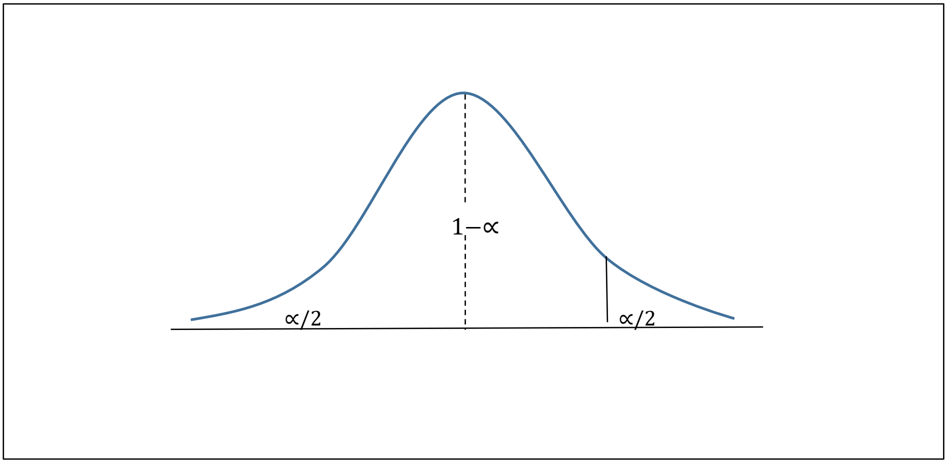
Expresión en la que $\overline{x_n}$ es la media muestral, $\boldsymbol{n},$ el tamaño de la muestra, $\hat{\boldsymbol{\sigma}},$ la estimación puntual de la desviación típica poblacional y $\boldsymbol{Z_{1-\propto/2}},$ la abscisa de la Función de Densidad de Probabilidad Normal Típica, que hubo alcanzado una acumulación de probabilidad de $1-\propto/2$. El intervalo, por las características de la función referida, evidentemente es simétrico centralizado en $\overline{x_n}$ **d** de esta manera el error de predicción,∈, en términos absolutos, estará dado por:

$$\in = \frac{Z_{1-\propto/2}}{\sqrt{n}} \; \hat{\sigma}$$

Que también es igual a hemidiferencia entre el mayorante y el minorante del indicado intervalo,

Lo anterior, puede expresarse en términos gráficos de la siguiente manera, que hace evidente los límites del intervalo como también su centralización:

GRÁFICO N°1



En el caso de que la población sea finita, de un tamaño **N,** conocido y no se realice el muestreo con remplazamiento[152], él precitado intervalo se convierte en[153]:

$$\left[\overline{x_n} - \frac{Z_{1-\frac{\propto}{2}}}{\sqrt{n}}\widehat{\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}\ \hat{\sigma} \qquad \overline{x_n} + \frac{Z_{1-\propto/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ \hat{\sigma}\right]$$

En este caso el error será:

$$\in= \frac{Z_{1-\frac{\propto}{2}}}{\sqrt{n}}\widehat{\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}\ \hat{\sigma}$$

Menor que en el caso de estimaciones realizadas en poblaciones infinitas.

Ilustración: En una investigación sobre la calificación que le otorga una población a un alcalde, se ha realizado una encuesta que mediante la tabla siguiente, expresa los resultados:

Calificación, **x,** que un entrevistado le otorga al alcalde	Frecuencia de la Calificación, F**x**
0	4

[152] En el caso de que el muestreo sea realizado con remplazamiento, se asume que una población finita, emula las características para el muestreo de una población infinita.

[153] Expresión en la que $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ corrige el sesgo que la finitud de la población, introduce en la estimación de la desviación típica poblacional, denominado Factor de Corrección por Finitud, así como el factor: $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$, es denominado Factor de Corrección de Sesgo.

1	7
2	3
3	8
4	6
5	8
6	4
7	7
8	3
9	1
No sabe o no responde	9

a) Asumiendo que la población entrevistada, es suficientemente grande como para ser considerada infinita, encontrar un intervalo que con una confianza de un 95% prediga la media de la apreciación pública por el alcalde.
b) Calcular lo solicitado en el punto anterior si se asume que la población entrevistada es de 400 habitantes.
c) Calcular el error de la inferencia bajo la asunción de que la población es infinita
d) Calcular el error de la inferencia en consideración a la determinación del tamaño de la población de la que se extrajo la muestra.

Procesamiento:

1) Es necesario en primera instancia encontrar la media y la desviación típica de la muestra, para lo que se utilizará la siguiente tabla de trabajo, que se desarrollará únicamente con los valores efectivos[154]:

X	**x^2**	**Fx**	**x Fx**	**x^2 Fx**
0	0	4	0	0
1	1	7	7	7
2	4	3	6	12
3	9	8	24	72
4	16	6	24	96
5	25	8	40	200
6	36	4	24	144
7	49	7	49	343
8	64	3	24	192
9	81	1	9	81
		$\sum Fx = 51$	$\sum xFx = 207$	$\sum x^2Fx = 1147$

[154] Es decir no se considerará la opinión de las personas que no emiten pronunciamiento, en el presente caso, 9 personas.

$$\bar{x} = \frac{207}{51} = 4{,}06 \qquad y \qquad s = \sqrt{\left(\frac{1147}{51}\right) - (207/51)^2} = 2{,}45$$

2) Se estima la desviación típica de la población, usando la desviación típica de la muestra:

$$\hat{\sigma} = s\sqrt{\frac{51}{50}} = (2{,}45)(1{,}01) = 2{,}48$$

3) El intervalo solicitado es:

$$\left[4{,}06 - \left(\frac{1{,}96}{\sqrt{51}}\right)(2{,}48) \qquad 4{,}06 + \left(\frac{1{,}96}{\sqrt{51}}\right)(2{,}48)\right] = [3{,}38 \qquad 4{,}74]$$

Se concluye que con una confianza de un 95%, la media poblacional, la opinión de la población a la que se entrevista (medida en la escala referenciada) se encuentra en el intervalo explanado.

b) En el caso de la población finita en la que N=600, en la estimación puntual de la desviación típica poblacional, el intervalo pertinente es:

$$\left[4{,}06 - \left(\frac{1{,}96}{\sqrt{51}}\right)\left(\sqrt{\frac{400-51}{400-1}}\right)(2{,}48) \qquad 4{,}06 + \left(\frac{1{,}96}{\sqrt{51}}\right)\left(\sqrt{\frac{400-51}{400-1}}\right)(2{,}48)\right] =$$

$$[3{,}42 \qquad 4{,}69]$$

c) El tamaño del error en el primer caso es:

$$\epsilon = \left(\frac{1{,}96}{\sqrt{51}}\right)(2{,}48) = 0{,}68$$

d) En el segundo caso:

$$\in = \left(\frac{1{,}96}{\sqrt{51}}\right)\left(\sqrt{\frac{400-51}{400-1}}\right)(2{,}48) = 0{,}64$$

INTERVALO DE CONFIANZA DE LA DIFERENCIA DE MEDIAS DE DOS POBLACIONES (Para Muestras Grandes).-

Si mediante dos muestras independientes, no necesariamente del mismo tamaño, se intenta pronosticar la diferencia de las medias aritméticas de dos poblaciones (que evidentemente son desconocidas), que tienen la misma variancia, el intervalo que con una confianza de 1-∝, permite la ejecución de éste objetivo es:

$$\left[\overline{(x_{n1}} - \overline{x_{n2}}) \; - \; \boldsymbol{\hat{\sigma}}\sqrt{\frac{1}{n1}+\frac{1}{n2}} \;\; \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1-\propto\frac{1}{2}}} \qquad \overline{(x_{n1}} - \overline{x_{n2}}) \; + \; \boldsymbol{\hat{\sigma}}\sqrt{\frac{1}{n1}+\frac{1}{n2}} \;\; \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1-\propto/2}}\right]$$

Formula que se transforma en:

$$\left[\overline{(x_{n1}} - \overline{x_{n2}}) \; - \; \sqrt{\frac{\widehat{\boldsymbol{\sigma}_1^2}}{n1}+\frac{\widehat{\boldsymbol{\sigma}_2^2}}{n2}} \;\; \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1-\propto\frac{1}{2}}} \qquad \overline{(x_{n1}} - \overline{x_{n2}}) \; + \; \sqrt{\frac{\widehat{\boldsymbol{\sigma}_1^2}}{n1}+\frac{\widehat{\boldsymbol{\sigma}_2^2}}{n2}} \; \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1-\propto/2}}\right]$$

Si las variancias de las poblaciones son diferentes y por lo tanto, cada una de ellas ha sido independientemente estimada.

En el caso de que las poblaciones sean finitas el intervalo es:

$$\left[\overline{(x_{n1}} - \overline{x_{n2}}) \; - \; \sqrt{\frac{\ddot{\sigma_1}}{n1}+\frac{\ddot{\sigma_2}}{n2}} \;\; \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1-\propto\frac{1}{2}}} \qquad \overline{(x_{n1}} - \overline{x_{n2}}) \; + \; \sqrt{\frac{\ddot{\sigma_1}}{n1}+\frac{\ddot{\sigma_2}}{n2}} \; \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1-\propto/2}}\right]$$ERROR

Ilustración I.- En la escala referenciada en el punto anterior, se encontró en una muestra de tamaño 36, tomada en la ciudad de El Alto que la opinión media respecto al presidente es 6,8, con una desviación típica muestral de 1,6 en otra muestra en la ciudad de La Paz, de tamaño 49, se verificó que la apreciación media respecto al presidente es de 5,9 con una desviación típica de 0,8.

a) Encontrar un intervalo que con una confianza de un 90%, estime la diferencia de la apreciación política que tienen los electores alteños respecto a los electores paceños.
b) Calcular el error de predicción.

Procesamiento.-

1) Se estima la desviación típica de la población alteña

$$\widehat{\sigma_1} = (1{,}6) \sqrt{\frac{36}{35}} = 1{,}62$$

2) Se estima la desviación típica de la población paceña

$$\widehat{\sigma_2} = (0{,}8)\sqrt{\frac{49}{48}} = 0{,}81$$

3) Se establece el intervalo

$$\left[(\mathbf{6,8-5,9}) - \left(\sqrt{\frac{\mathbf{1,62}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{0,81}}{\mathbf{49}}}\right)(\mathbf{1,65}) \quad (\mathbf{6,8-5,9}) - \left(\sqrt{\frac{\mathbf{1,62}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{0,81}}{\mathbf{49}}}\right)(\mathbf{1,65})\right]$$

$$= [\mathbf{0,49} \qquad \mathbf{1,31}]$$

c) $$\boldsymbol{\epsilon} = \left(\sqrt{\frac{\mathbf{1,62}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{0,81}}{\mathbf{49}}}\right)(\mathbf{1,65}) = \mathbf{0,41}$$

Se puede concluir, de forma preliminar[155], que la diferencia de la apreciación, con una confianza de un 90% es menor a un punto

Ilustración II.- En la escala mentada, la media aritmética de la calificación que una muestra de la Carrera de Ingeniería Civil de 30 alumnos le otorga al rector de la universidad es de 6,4, con una desviación típica de 1 punto en tanto que la respectiva de una muestra de 50 alumnos de la Carrera de Derecho es de 4,2 con una desviación típica de 0,5 puntos.

a) Calcular con una confianza de un 99% el intervalo de la diferencia de medias, de la apreciación por el rector de ambas carreras, si el número de alumnos de la Carrera de Ingeniería es de 300 y el de la Carrera de Derecho 800.
b) Calcular el error de la estimación.

Resolución.-

1) Se calcula el estimador de la desviación típica de cada una de las poblaciones[156]:

$$\ddot{\sigma}_1 = \left(\sqrt{\frac{30}{29}}\right)\left(\sqrt{\frac{300-30}{300-1}}\right)1 = 0{,}97 \quad \ddot{\sigma}_2 = \left(\sqrt{\frac{50}{49}}\right)\left(\sqrt{\frac{800-49}{800-1}}\right)0{,}5 = 0{,}49$$

2) Se determina el intervalo solicitado:

[155] La conclusión definitiva, se desarrollará mediante una contrastación de hipótesis

[156] $\ddot{\sigma}_1 = \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\left(\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)s$

$$\left[(6{,}4-4{,}2)\ -\ \sqrt{\frac{0{,}97}{30}+\frac{0{,}49}{50}}\ \ (\,2{,}57) \qquad (6{,}4-4{,}2)\ +\ \sqrt{\frac{0{,}97}{30}+\frac{0{,}49}{50}}\ \ (\,2{,}57)\right]$$

$$=\ [1{,}67 \qquad\qquad 2{,}73]$$

b) $\boldsymbol{\epsilon = \left(\sqrt{\frac{0{,}97}{30}+\frac{0{,}49}{50}}\right)(2,57) = 0,53}$

INTERVALO DE CONFIANZA DE LAS DIFERENCIA DE MEDIAS DE OBSERVACIONES PAREADAS.-

Si en un proceso experimental, se extraen *n* observaciones bidimensionales, es decir, se anotan dos atributos, respecto a cada uno de sus elementos constituyentes (un par de datos), esperándose que entre ellos exista una correlación significativa[157], y que por lo tanto la variancia de la diferencia de los atributos, no sea la simple suma aritmética de las variancias de cada uno de los datos, como si estos fueran independientes sino, la preindicada restada dos veces su covariancia:

$$Var(x_1-x_2)=Var(x_1)+Var(x_2)-2Cov(x_1,x_2)$$

El intervalo que a una probabilidad **1-∝** contiene la diferencia de las medias poblacionales, $\mu_1-\mu_{2,}$ es:

$$\left[\overline{(\overline{x_{n1}}-\overline{x_{n2}}\ )}\ \ -\ \breve{\boldsymbol{\sigma}}\sqrt{\frac{1}{n}}\ \ \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1-\propto\frac{1}{2}}} \qquad \overline{(\overline{x_{n1}}-\overline{x_{n2}}\ )}\ \ +\ \breve{\boldsymbol{\sigma}}\sqrt{\frac{1}{n}}\ \ \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1-\propto/2}}\right]$$

[157] Como por ejemplo se pregunta al esposo y a la esposa de cada familia utilizada como elemento muestral su preferencia política.

Expresión en la que $\breve{\sigma}$**, el estimador de la desviación típica de la diferencia de los atributos pareados es dada por:**

$$\breve{\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{i=n}(x_{1,i} - x_{2,i})^2 - (\sum_{i=1}^{i=n}(x_{1,i} - x_{2,i}))^2}{n(n-1)}}$$

Ilustración.- Se entrevista (en sujeción a la escala de calificación anteriormente utilizada) a 32 esposos (esposa y esposo) respecto a su opinión de la gestión de un alcalde, obteniéndose los resultados que expresa la siguiente Tabla de Distribución de Frecuencias:

Opinión del Esposo, x_1	**Opinión de la Esposa,** x_2
4	**5**
8	**8**
2	**4**
6	**5**
5	**4**
6	**7**
8	**8**
2	**7**
3	**3**
7	**9**
8	**6**

0	**2**
2	**5**
5	**6**
7	**6**
4	**4**
6	**2**
5	**6**
5	**8**
9	**2**
6	**7**
9	**5**
3	**4**
6	**7**
8	**9**
1	**0**
6	**4**
7	**4**
8	**9**

6	**9**
1	**3**
7	**5**

a) Calcular a un 90% el intervalo de la diferencia de la opinión del esposo respecto a la opinión de la esposa

b) Calcular el error de la estimación

Resolución.-

1) Se debe estimar la desviación típica de la diferencia de opiniones en la población

Opinión del Esposo x_1	**Opinión de la Esposa x_2**	**Diferencia de las Opiniones**	**Diferencia cuadrática de las opiniones**	x_1^2	x_2^2	$x_1 * x_2$
4	**5**	-1	1	16	25	20
8	**8**	0	0	64	64	64
2	**4**	-2	4	4	16	8
6	**5**	1	1	36	25	30
5	**4**	1	1	25	16	20
6	**7**	-1	1	36	49	42

8	**8**	0	0	64	64	64
2	**7**	-5	25	4	49	14
3	**3**	0	0	9	9	9
7	**9**	-2	4	49	81	63
8	**6**	2	4	64	36	48
0	**2**	-2	4	0	4	0
2	**5**	-3	9	4	25	10
5	**6**	-1	1	25	36	30
7	**6**	1	1	49	36	42
4	**4**	0	0	16	16	16
6	**2**	4	16	36	4	12
5	**6**	-1	1	25	36	30
5	**8**	-3	9	25	64	40
9	**2**	7	49	81	4	18
6	**7**	-1	1	36	49	42
9	**5**	4	16	81	25	45
3	**4**	-1	1	9	16	12
6	**7**	-1	1	36	49	42

8	**9**	-1	1	64	81	72
1	**0**	1	1	1	0	0
6	**4**	2	4	36	16	24
7	**4**	3	9	49	16	28
8	**9**	-1	1	64	81	72
6	**9**	-3	9	36	81	54
1	**3**	-2	4	1	9	3
7	**5**	2	4	49	25	35
170	173	-3	183	1094	1107	1009

$$\breve{\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{\mathbf{32 * 183 - (-3)^2}}{\mathbf{32(32-1)}}}$$

$$\breve{\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\mathbf{5.8941532}}$$

$$\breve{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{2.4277877}$$

Variancias:

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA POBLACIONAL (para muestras pequeñas).-

En el caso que la muestra tenga menos de treinta elementos y, cuando existe suficiente fundamento para asumir que la población se distribuye aproximadamente como una normal, es posible construir el intervalo de confianza de la media poblacional utilizando la función de densidad de probabilidad t de Student[158], en cuyo caso el intervalo que contiene con una confianza 1-∝ la media poblacional es:

$$\left[\overline{x_n} - \frac{t_{(v,1-\propto/2)}}{\sqrt{n}}\,\hat{\sigma} \qquad \overline{x_n} + \frac{t_{(v,1-\propto/2)}}{\sqrt{n}}\,\hat{\sigma}\right]$$

Fórmula en la que $t_{(v,1-\propto/2)}$ representa la abscisa de una función de densidad de probabilidad t de estudent con *v* grados de libertad[159], que corresponden al tamaño de la muestra menos uno, n-1, y a un grado de acumulación de probabilidad de $1 - \propto/2$.

Ilustración: Asumida que la edad de los militantes de un partido político se distribuye normalmente, habiéndose encontrado en una muestra, de tamaño 18 que la media de la edad de los militantes es de 44 años, con una desviación típica de 3 años.

a) Encontrar un intervalo de confianza que a un 95% prediga la edad media de los militantes (bajo el supuesto de que la población es suficientemente extensa).

[158] Disponible en el apéndice…………………………..

[159] Explicar el significado de grados de libertad…………………

b) Si la observación es respecto a los dirigentes del partido, que son 40, encontrar el intervalo de confianza que a un 99% prediga la edad de un dirigente.

Resolución:

1) Se debe estimar la desviación típica poblacional puntualmente a partir la desviación típica muestral, entonces:

$$3{,}09años = 3años(\sqrt{\frac{18}{17}})$$

2) Se construye el intervalo correspondiente:

$$\left[\mathbf{44} \; - \; \frac{t_{(18-1,\;\; 0{,}975)}}{\sqrt{18}} \; \mathbf{3,09\; años} \qquad \mathbf{44} \; + \; \frac{t_{(18-1,\;\; 0.975)}}{\sqrt{18}} \; \mathbf{3,09\; años} \; \right]$$

$$\left[\mathbf{44} \; - \; \frac{2{,}1098}{\sqrt{18}} \; \mathbf{3,09\; años} \qquad \mathbf{44} \; + \; \frac{2{,}1098}{\sqrt{18}} \; \mathbf{3,09\; años} \; \right] =$$

$$[\mathbf{42,46\; años} \qquad\qquad \mathbf{45,54\; años}]$$

b)

1) Se estima la desviación típica poblacional, multiplicando la desviación típica muestral, por el Factor de Corrección de Sesgo y luego por el Factor de Corrección por Finitud.

$$2{,}41 = 3años\;(\sqrt{\frac{18}{18-1}})(\sqrt{\frac{40-18}{40-1}})$$

2) Se construye el intervalo correspondiente:

$$\left[\mathbf{44} \; - \; \frac{\boldsymbol{t}_{(\mathbf{18-1,\;\; 0{,}995})}}{\sqrt{\mathbf{18}}} \; \mathbf{2,41\; años} \quad \mathbf{44} \; + \; \frac{\boldsymbol{t}_{(\mathbf{18-1,\;\; 0{,}995})}}{\sqrt{\mathbf{18}}} \; \mathbf{2,41\; años}\right] =$$

$$\left[\mathbf{44} \; - \; \frac{\mathbf{2,8982}}{\sqrt{\mathbf{18}}} \; \mathbf{2,41\; años} \quad \mathbf{44} \; + \; \frac{\mathbf{2,8982}}{\sqrt{\mathbf{18}}} \; \mathbf{2,41\; años}\right] =$$

$$[42{,}35 \qquad\qquad 45{,}65]$$

Intervalo de Confianza de la Variancia Poblacional.-

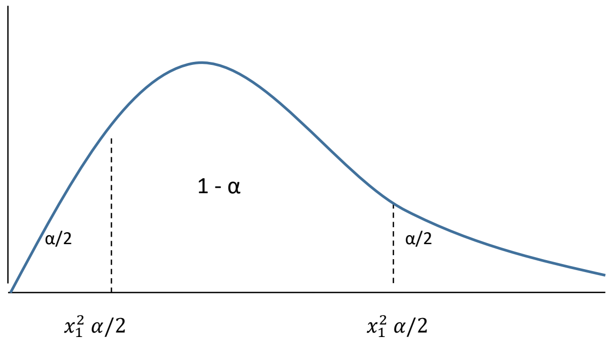
Por los resultados expuestos en el primer capítulo (ultima parte), se tiene que: $\vartheta = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_x^2}$, se distribuye de acuerdo a una variable aleatoria X^2 con n-1 grados de libertad, esta proposición implica que el intervalo de con un grado de confianza 1-∝, contiene a la variancia poblacional, está dado por:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{X^2_{(v,1-\propto/2)}} \qquad \frac{(n-1)S^2}{X^2_{(v,\propto/2)}}\;\right]$$

En el que $X^2_{(v,1-\propto/2)}$ representa la abscisa Chi Cuadrado, que con *v* grados de libertad alcanzó una $1-\propto/2$ y $X^2_{(vX^2_{(v,\propto/2)})}$ la abscisa que implica $\propto/2$ de probabilidad acumulada. Debe resaltarse que al ser la función disimétrica[160], los valores Chi cuadrado citados para las dos diferentes abscisas, son distintos.

160 Ver el apéndice……….

Gráfico N° 2



Intervalo de Confianza de la Desviación Típica Poblacional.- Como una consecuencia necesaria del resultado expresado en el anterior acápite y en atención a que por definición, la desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la variancia, el intervalo que predice a un grado de confianza 1-∝ la desviación típica de una población ésta representado por:

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{X^2_{(v,1-\propto/2)}}} \qquad \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{X^2_{(v,\propto/2)}}}\right]$$

Ilustración.- Se encuentra que una muestra de tamaño 36 tiene una variancia de 3, si existen suficientes fundamentos para sostener que la población de la que fue extraída, se distribuye normalmente, encontrar

a) Un intervalo que a un 90% infiera la variancia Poblacional

b) Un intervalo que a un 95 % estime la desviación típica poblacional

Resolución.-

a) Se plantea el intervalo de la variancia con los valores proporcionados, es decir, la variancia muestral, y los valores de la abscisa de la variable Chi Cuadrado, que implican una acumulación de probabilidad de un 95% y de 5%, proporcionados por la tabla integrada al presente estudio.

$$\left[\frac{(36-1)(3)}{X^2_{(36-1,\quad 0{,}95)}} \qquad \frac{(36-1)3}{X^2_{(36-1,\quad 0{,}05)}}\right] =$$

$$\left[\frac{(36-1)(3)}{49{,}802} \qquad \frac{(36-1)(3)}{22{,}465}\right] =$$

$$[2{,}11 \qquad\qquad 4{,}67\,]$$

b) Se extrae simplemente la raíz cuadrada del minorante y el mayorante del intervalo que contiene la variancia:

$$\left[\sqrt{2{,}11} \qquad \sqrt{4{,}67}\right] = [1{,}45 \qquad 2{,}16]$$

Intervalo de Confianza de la Proporción de un Atributo.-

Si se puede establecer la taxonomía de una población[161], sobre la base de un atributo P, que se encuentra en la proporción ρ en la indicada población (Se hace evidente, que el atributo $\sim$P se encuentra en la proporción 1- ρ. Disponiéndose de una muestra de tamaño *n*, suficientemente grande, de manera que sean: $\rho\, n \geq 30\ y\ (1-\rho)n \geq$

[161] La clasificación de sus elementos

30, el intervalo que con una confianza de 1-α contiene la proporción poblacional referida es:

$$\left[\hat{p} - z_{\left(1-\frac{\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\hat{\rho}(\widehat{1-\rho})}{n}} \qquad \hat{p} + z_{\left(1-\frac{\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\hat{\rho}(\widehat{1-\rho})}{n}}\right]$$

Expresión en la que $\hat{p}$ representa la proporción muestral del atributo, que estima puntualmente la proporción poblacional, $z_{\left(1-\frac{\propto}{2}\right)}$ la abscisa normal que implica la acumulación de probabilidad que se define en el subíndice $1-\frac{\propto}{2}$ si y el sub radical, la **variancia estimada de la proporción**[162]. En el caso de que no se pueda estimar fácilmente la variancia de la proporción poblacional, se asumirá que la referida es: 0,25/*n*, que implica el máximo del eventual producto $\hat{\rho}(\widehat{1-\rho})$[163].

En el caso de que la población no se asuma infinita o no se desarrolle un muestreo aleatorio con sustitución, la expresión se transforma en:

$$\left[\hat{p} - z_{\left(1-\frac{\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\hat{\rho}(\widehat{1-\rho})}{n}}\ \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad \hat{p} + z_{\left(1-\frac{\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\hat{\rho}(\widehat{1-\rho})}{n}}\ \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

Es decir, es la anterior cuyos extremos (mayorante y minorante) han sido multiplicados por la raíz cuadrada del Factor de Corrección de Finitud[164].

---

[162] La variancia estimada de la población x, si ésta presenta una distribución Binomial es: V(x) = n p q entonces la variancia de x/n será por las propiedades de la variancia expresadas en la página 96 del primer tomo de la obra, V(x/n)=pq/n

[163] Sea Z=$\hat{\rho}(\widehat{1-\rho})$ implica $\frac{dz}{d\hat{\rho}} = 1 - 2\hat{\rho} = 0 \rightarrow \hat{\rho} = 0{,}5$ cumplida la condición de segundo orden $\frac{d^2z}{dp^2}$=-2<0

[164] Ver pie de página N°…………

Ilustración.- En una muestra de tamaño 200, se encuentra que 40 personas prefieren al MAS respecto a cualquier otro partido, a) encontrar un intervalo de confianza que al 95% estime la proporción de adherentes al indicado partido, en una población suficientemente extensa[165]. b) realizar la estimación, al mismo nivel de confianza, si la población está integrada por 1500 habitantes.

Resolución.-

a)

1) En primera instancia se verifica que la muestra es suficientemente grande, esto es que el número de masistas (40) y no masistas (160) supere 30 elementos, como efectivamente acontece.

2) Luego se encuentra el número de masistas en la muestra, que también es el estimado puntual de masistas en la población,

$$\hat{\rho} = \frac{40}{200} = 0{,}2$$

3) Se encuentra el intervalo de confianza respectivo,

$$\left[\hat{p} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{\rho(1-\rho)}}{n}} \qquad \hat{p} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{\rho(1-\rho)}}{n}}\right] =$$

$$\left[0{,}2 - (1{,}96)\sqrt{\frac{(0{,}2)(1-02)}{200}} \qquad 0{,}2 + (1{,}96)\sqrt{\frac{(0{,}2)(1-02)}{200}}\right] =$$

[165] Cuando se enuncie la expresión "Suficientemente Extensa" asimílese a una población infinita, en la que consecuentemente se asume independencia entre los elementos obtenidos para la muestra.

$$[\mathbf{0,14} \qquad \mathbf{0,26}]$$

Es decir se puede afirmar con una confianza de un 95% que el número de masistas en la población oscila entre un 14% a un 26%.

b) Para la resolución, se multiplican los extremos del intervalo por la raíz cuadrada del Factor de Corrección de Finitud respectivo,

$$\left[\mathbf{0,14}\sqrt{\frac{\mathbf{1500-200}}{\mathbf{1500-1}}} \qquad \mathbf{0,26}\sqrt{\frac{\mathbf{1500-200}}{\mathbf{1500-1}}}\right] =$$

$$[\mathbf{0,14}(\ldots) \qquad \mathbf{0,26}(\ldots..)]$$

INTERVALO DE CONFIANZA DE LA DIFERENCIA DE LAS PROPORCIONES EN LA QUE SE PRESENTA UN ATRIBUTO EN DOS POBLACIONES.-

Si se califican los elementos de dos poblaciones en atención a que posean o no un determinado atributo, el atributo P, como se hizo referencia en el anterior punto, dadas dos muestras independientes, tomadas de las referidas poblaciones, en las que el atributo se presenta en las proporciones $\widehat{\rho_1}$ y $\widehat{\rho_2}$**,** respectivamente, el intervalo que infiere a una confianza 1-∝, la diferencia en la que el atributo se hace efectivo en ambas poblaciones, está definido por el intervalo:

$$\left[(\widehat{p_1}-\widehat{p_2})-z_{\left(1-\frac{\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(\widehat{1-p_1})}{n_1}+\frac{\widehat{p_2}(\widehat{1-p_2})}{n_2}} \qquad (\widehat{p_1}-\widehat{p_2})+z_{\left(1-\frac{\propto}{2}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(\widehat{1-p_1})}{n_1}+\frac{\widehat{p_2}(\widehat{1-p_2})}{n_2}}\right]$$

La expresión sub radical representa la variancia de la diferencia de ambas proporciones[166], en la situación que las poblaciones de las que se extrae la muestra no puedan considerarse finitas o esta se obtenga sin remplazamiento, la expresión se transforma en:

$$\left[\begin{array}{c} (\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)} \\ \vdots \\ (\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)} \end{array}\right]$$

bajo el mismo argumento sostenido en el apartado anterior.

Ilustración.-

Se toma una muestra de tamaño 300 en un recinto electoral, en el que participaron 1500 electores en ella la proporción de votos nulos es de un 10%, de otro recinto electoral, ubicado en una zona distinta, en el que votaron 1000 personas, se toma una muestra de tamaño 250 hallándose 45 votos nulos, encontrar un intervalo de confianza a un 90% que determine la diferencia de proporciones de votos nulos del primer distrito respecto al segundo. Realizar el ejercicio bajo muestreo con remplazamiento y muestreo sin remplazamiento, encontrando en cada caso el error de predicción. Por último encontrar el beneficio que aporta el muestreo sin remplazamiento.

Resolución.-

---

166 Obviamente n_1 y n_2, son los tamaños de las muestras involucradas y con un poco más de esfuerzo es notorio que la variancia de diferencia de las proporciones es una media cuadrática de la desviación típica de las proporciones presentes en cada una de las muestras.

a) En el caso de que se desarrolle el muestreo con remplazamiento.

1) Se debe estimar la proporción en ambas poblaciones, del atributo votos nulos:

$$\widehat{p_1} = 0{,}1 \quad y \quad \widehat{p_2} = \frac{45}{250} = 0{,}18$$

2) En consecuencia los complementos respectivos de los anteriores estimadores son:

$$1-\widehat{p_1}=0{,}9 \quad y \quad 1-\widehat{p_2}=0{,}82$$

3) Aplicando la formula general presentada en éste apartado, para encontrar los límites Min= minorante del intervalo y May= mayorante del intervalo se tiene el intervalo correspondiente:

$$\text{Min}=(\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(\widehat{1-p_1})}{n_1} + \frac{\widehat{p_2}(\widehat{1-p_2})}{n_2}}$$

$$\text{Min}=(0{,}9-0{,}82)- 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}1(0{,}9)}{300} + \frac{0{,}18(0{,}82)}{250}} = 0{,}031$$

$$\text{May}= (0{,}9-0{,}82)+1{,}65\sqrt{\frac{0{,}1(0{,}9)}{300} + \frac{0{,}18(0{,}82)}{250}} = 0{,}129$$

$$[0{,}031 \qquad\qquad 0{,}129]$$

El resultado anterior indica que con una confianza de un 90% la diferencia de proporción de votos nulos del primer recinto respecto a los votos nulos del segundo recinto se encuentra entre un 3,1% a un 13%, alcanzando al nivel de confianza indicado el error de predicción:

$$e = 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}1(0{,}9)}{300} + \frac{0{,}18(0{,}82)}{250}} = 0{,}049$$

b) Corrigiendo la finitud, el resultado se convierte en:

$$\text{Min*} = (\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)} =$$

$$(0{,}9-0{,}82)-1{,}65\sqrt{\frac{0{,}1(0{,}9)}{300}\frac{(1500-300)}{(1500-1)} + \frac{0{,}18(0{,}82)}{250}\frac{(1000-250)}{1000-1}} = 0{,}037$$

$$\text{May*} = (\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)} =$$

$$0{,}9-0{,}82)+1{,}65\sqrt{\frac{0{,}1(0{,}9)}{300}\frac{(1500-300)}{(1500-1)} + \frac{0{,}18(0{,}82)}{250}\frac{(1000-250)}{1000-1}} = 0{,}123$$

$$[0{,}037 \qquad\qquad 0{,}123]$$

El error correspondiente es:

$$e^* = 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}1(0{,}9)}{300}\frac{(1500-300)}{(1500-1)} + \frac{0{,}18(0{,}82)}{250}\frac{(1000-250)}{1000-1}} = 0{,}043$$

c) El beneficio que aporta el muestreo sin remplazamiento en términos porcentuales es:

$$\boldsymbol{ben = \frac{e-e*}{e}\mathbf{x100} = \frac{0{,}049-0{,}043}{0{,}049} = 12{,}24}$$

Capitulo Cuarto

VARIABLES

Las más importantes funciones de densidad de probabilidad en atención a su rol en la Inferencia Estadística, debido a que con ellas, en la mayoría de los casos, se puede determinar intervalos de confianza y contrastar hipótesis respecto a parámetros poblacionales u otras relativas a la correspondencia de una formulación teórica respecto a un sustrato de datos concretos, son:

~ La Función de Densidad de Probabilidad Normal
~ La Función de Densidad de Probabilidad Gama
~ La Función de Densidad de Probabilidad Chi Cuadrado
~ La Función de Densidad de Probabilidad t de Student
~ La Función de Densidad de Probabilidad F de Snedocor

Variable Aleatoria Normal.-

La variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está representada por la expresión[167]:

[167] El símbolo **e**, como lo debiera conocer cualquier bachiller en humanidades, es la base de los Logaritmos Neperianos, un número trascendente (que no puede ser expresado por la relación de dos enteros) que en valor se aproxima indefinidamente a 2,7183. El aludido valor matemático, muy importante, resulta de:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

definida en el dominio pleno de los Números Reales, es decir en el intervalo $[-\infty \quad \infty]$, se denomina Variable Aleatoria Normal, con media en µ y con desviación típica en σ[168], es la más importante de las variables aleatorias en vista de que la distribución de las medias muestrales a medida que aumenta el tamaño de la muestra, se asintotiza[169] a esta función y también porque permite representar con gran proximidad la evolución de otras variables aleatorias como la binomial y la hipergeométrica. En el caso de que µ sea 0 (cero) y σ, adquiera el valor 1 (uno), se llama Variable Aleatoria Normal Típica, que en el presente texto será representada por *"z".* La función de densidad de probabilidad de una Variable Aleatoria Normal típica, el merónimo más importante de la expresión general, entonces, es,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Al que, como se verá más adelante, puede convertirse cualquier variable aleatoria normal.

---

[168] Entonces el algoritmo que define la densidad de probabilidad de la variable aleatoria normal, queda plenamente especificado mediante el conocimiento de su media y de su desviación típica y, fue inventado por Abraham DeMoivre en el año de 1733, aunque comúnmente se la conoce por Distribución Gaussiana o "Campana de Gauss" en el caso de que su desviación típica sea uno y entonces sea "perfectamente mesocurtica".

[169] Se acerca indefinidamente a una distribución normal. Se considera que una muestra es grande y que por lo tanto se asemeja suficientemente a una normal, cuando tiene 30 o más elementos.

Siendo su positividad manifiesta, al tratarse de una función exponencial, se puede demostrar que el área encerrada en su dominio es igual a uno de la siguiente manera:

1) Se denomina q, al área que define la integral $q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

2) Esta área puede ser representada también por la variable w es decir

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dw$$

3) Multiplicando los respectivos miembros izquierdos y derechos de las anteriores ecuaciones se tiene

$$q^2 = (\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz) (\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw)$$

4) Que por las propiedades de las integrales dobles es equivalente a,

$$q^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{z^2+w^2}{2})} dzdw$$

5) Para poder encontrar la primitiva de la integral doble, se transforma el espacio cartesiano en el que está originalmente definida a coordenadas polares, haciendo

$$z = \rho\, sen(\alpha)\ y\ \ w = \rho\, Cos(\alpha)$$

Evidentemente, los límites de esta transformación indican que ρ (el radio vector) varía de 0 a ∞ y α (el ángulo) de 0 a 2π [170]

Originando el Jacobiano[171] $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial w}{\partial \rho} & \frac{\partial w}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \left\| \begin{bmatrix} sen\ \alpha & \rho \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\rho\ sen\ \alpha \end{bmatrix} \right\| = \rho.$

Por lo que el área q^2 representada mediante la transformación señalada es.

$$q^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\rho^2 sen^2(\alpha) + \rho^2 cosen^2(\alpha)}{2}\right)} \rho\, d\rho d\alpha$$

$$q^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(\frac{\rho^2}{2})} \rho\, d\rho d\alpha$$

$$q^2 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{-\frac{\rho^2}{2}} \langle 0|\infty \rangle) d\alpha$$

$$q^2 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-1) d\alpha$$

$$q^2 = -\frac{1}{2\pi} \alpha \, \langle 0|2\pi \rangle$$

$$q^2 = \frac{2\pi}{2\pi} = \mathbf{1}$$

---

170 El tamaño del radio vector de cero a infinito y el ángulo que en toda su posibilidad completa el giro de una circunferencia.

171171 Determinante de la Transformación, que permite la aplicación, correspondencia uno a uno, de los elementos del espacio original, en los elementos del espacio transformado.

Cuya raíz igual a la unidad, prueba que el espacio encerrado por la función y el eje de las abscisas es uno y entonces asumida la positividad que se ha mencionado, representa una función de densidad de probabilidad.

Con el auxilio del anterior resultado, se hace sencillo demostrar que efectivamente la media de una Función de Densidad de Probabilidad Normal, expresada de forma general es μ;

Sea,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

una Función de Densidad de Probabilidad Normal, con parámetros $\mu\ y\ \sigma$, que consecuentemente implica que la esperanza matemática de la variable aleatoria x es,

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} dx$$

Cambiando la Variable $p = \frac{x-\mu}{\sigma}$ en la que $x = \sigma p + \mu$ y $dx = \sigma\, dp$

$$E(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma p + \mu\ \ e^{-\left(\frac{p}{2}\right)^2}\ \sigma)\, dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sigma p\, dp + \mu\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{p}{2}\right)^2} dp \right]$$

$$E(x) = \frac{2\,\sigma\, p^2}{\sqrt{2\pi}}\ |_{-\infty}^{\infty} dp\ |_{-\infty}^{\infty} + \mu\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{p}{2}\right)^2} dp$$

Siendo que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{p}{2}\right)^2} dp = 1$ y $\frac{2\,\sigma\, p^2}{\sqrt{2\pi}} |_{-\infty}^{\infty} = 0$

Al representar el primer miembro el área encerrada bajo una normal típica y nulificarse entre sus límites el segundo:

$$E(x) = \mu$$

Como se enunció al principio de los enunciados antecedentes.

De manera análoga, se puede demostrar que σ^2 es la variancia de una Función de Densidad de Probabilidad Normal;

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

$$E(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Cambio de variables: $p = \frac{x-\mu}{\sigma}$ en la que $x = \sigma p + \mu$ y $dx = \sigma \, dp$

$$E(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma \, p + \mu)^2 \; e^{-\frac{p^2}{2}} \sigma \, dp$$

$$E(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \, p^2 \, e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp + \int_{-\infty}^{\infty} 2 \, \sigma \, p \, \mu \; e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp + \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp \right]$$

$$E(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_3$$

Integrando cada una de las señaladas,

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \, p^2 \, e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp \; = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \, e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp$$

Integrando por partes,

$v = p \, ; \quad dw = p \, e^{-\frac{p^2}{2}} \, ;$

$$dv = dp \; \rightarrow \; w = \int_{-\infty}^{\infty} p \, e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp = - \, e^{-\frac{p^2}{2}} |_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$I_1 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[p e^{-\frac{p^2}{2}} |_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp \right] = \frac{\sigma^2 1}{\sqrt{2\pi}} \left[-0 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp \right] =$$

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp = \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp = \sigma^2 \, 1 = \sigma^2$$

En virtud de que la expresión post cedente a sigma representa un área bajo una normal típica.

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \, \sigma \, p \, \mu \; e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp \; = \frac{2 \, \sigma \, \mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p \;\; e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp =$$

$$2 \, \sigma \, \mu (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p \;\; e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp) = 2 \, \sigma \, \mu \, 0 = 0$$

En atención a que la expresión contenida en el último paréntesis define la esperanza matemática de una Variable Aleatoria Normal Típica que, es 0.

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp = \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2}} \, dp = \mu^2 \, 1 = \mu^2$$

Por la extensión del área bajo cualquier función de densidad de probabilidad

$E(x^2) = I_1 + I_2 + I_3 = \sigma^2 + 0 + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$ y $E(x) = \mu$ -> $E(x)^2 = \mu^2$

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2$$

Con que queda demostrado que: $V(x) = \sigma^2$

Otro resultado importante es la Función Generatriz de Momentos de la Variable aleatoria normal, la cual se puede encontrar de la siguiente manera :

Por definición de la Función Generatriz de Momentos

$$E[e^{t\,x}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\,x}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Por propiedades de exponentes

$$E[e^{t\,x}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\,x - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$E[e^{t\,x}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\,t\,x\,\sigma^2 - x^2 + 2\,x\,\mu - \mu^2}{2\sigma^2}} dx$$

Agregando y luego restando al exponente de la base de Euler la constante$(t\,\sigma^2 + \mu)^2$, con el fin de lograr un cuadrado perfecto, la ecuación se convierte en,

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2x(t\sigma^2+\mu)-\mu^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2x(t\sigma^2+\mu)+(t\sigma^2+\mu)^2-\mu^2-(t\sigma^2+\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

Aplicando propiedades de los exponentes a fin de obtener una función de densidad normal, acotada en todo su dominio

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x-t\sigma^2-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(t\sigma^2+\mu)^2-\mu^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= e^{\frac{t^2\sigma^4+2t\sigma^2\mu}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-(t\sigma^2+\mu))}{2\sigma^2}} dx =$$

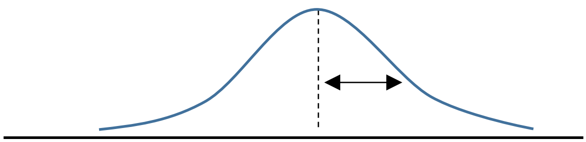
Siendo que la integral aludida, definida anteriormente, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-(t\sigma^2+\mu))}{2\sigma^2}} dx = 1$ tenemos:

$$e^{\frac{t^2\sigma^4+2t\sigma^2\mu}{2\sigma^2}} 1 = \boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\mu}}$$

Que representa la Función Generatriz de Momentos de la Variable Aleatoria Normal (de cualquier media μ y desviación típicaσ).

Características de Una Variable Aleatoria Normal.-

La representación gráfica de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal, presenta el siguiente esquicio, que se hace más puntiagudo cuanto menor es la desviación típica (en la especie sea menor a uno) y más plano en el caso de que aumente la desviación típica (en el presente caso sea mayor a uno)



En el que se puede apreciar:

a) Por la simetría de la función[172], que la densidad de probabilidad de un valor cualquiera del dominio de la variable, depende de su distancia[173] respecto a la media, cuya recta perpendicular al eje de las abscisas en el punto en que está definida es el eje de simetría de la función de densidad de probabilidad.

b) Que, la función de densidad de probabilidad normal, alcanza su máximo absoluto cuando su abscisa corresponde a su media y, se hace asintótica indefinidamente a cero, respecto al eje de las abscisas a medida que la función se aleja, por exceso o por defecto, del indicado parámetro.

c) Que, la distancia horizontal de la media a la proyección horizontal (sobre el eje de las abscisas) de cualquiera de sus

[172] La variable aleatoria normal es perfectamente simétrica, por lo que su **Coeficiente de Asimetría de Fisher es igual a cero (ver la página 99 del primer tomo).**

[173] El valor absoluto de la diferencia del valor con la media

puntos de inflexión[174] es igual a la desviación típica de la variable[175].

d) Que su coeficiente de asimetría es 0, aspecto concordante con la propiedad señalada en el inciso a[176].

---

174 La diferencia en valor absoluto de la abscisa de la media con la abscisa de cualquiera de los puntos en los cuales la variable cambia de cóncava a convexa y luego de convexa nuevamente a cóncava.

175 La probabilidad de que ocurra la variable en el intervalo que tiene por límite inferior, la media menos una desviación típica y por límite superior la media más una desviación típica es igual a 68,27%. La probabilidad de que ocurra un evento en el intervalo cuyo minorante es la media menos dos desviaciones típicas y que tiene por mayorante a la media más dos desviaciones típicas es de un 95,45%. Y por último, la probabilidad de que ocurra la variable en el segmento que empieza a tres desviaciones típicas menos que la media y que termina a tres desviaciones típicas más es de 99,73 %.

176 El coeficiente de sesgo, definido como $E((x-\mu)^3)$ que verifica la simetría de la función respecto al eje proyectado desde μ, se puede encontrar usando la función generadora de momentos, hallada anteriormente;

$$M_x(t) = E[e^{t\,x}] = \boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}}$$

Derivando la función se tiene

$$M_x^{(1)}(t) = \boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}\;(t\sigma^2+u)}$$

La que evaluada en cero origina

$$E(x) = \mu$$

Derivando la derivada encontrada, a efecto de encontrar el segundo momento no desplazado, se presenta,

$$M_x^{(2)}(t) = \boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}\;((t\sigma^2+u)^2+\sigma^2)}$$

Resultado que evaluado en cero, otorga,

$$E(x^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

Derivando una vez más la función (accediendo a la tercera derivada de la función generatriz de momentos) da,

$$M_x^{(3)}(t) = \left(\boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}\;(t\sigma^2+u)}\right)\boldsymbol{((t\sigma^2+u)^2+\sigma^2)+(2(t\sigma^2+u)\sigma^2)e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}}$$

La que evaluada en cero resulta,

$$E(x^3) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$$

e) Que, el grado de apuntamiento de la variable (como el de cualquier otra) se corresponde de forma inversa al tamaño de su desviación típica, correspondiendo a la denominada "Campana de Gauss" una desviación típica igual a 1[177].

Desarrollando el Coeficiente de Sesgo, es posible utilizar los resultados encontrados:

$$E(x-\bar{x})^3 = E(x^3 - 3x^2\bar{x} + 3x\bar{x}^2 - \bar{x}^3)$$

$$E(x-\bar{x})^3 = E(x^3) - 3E(x^2)\bar{x} + 3E(x)\bar{x}^2 - \bar{x}^3$$

$$E(x-\bar{x})^3 = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 - 3(\mu^2+\sigma^2)\bar{x} + 3(\mu)\bar{x}^2 - \bar{x}^3$$

$$E(x-\bar{x})^3 = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 - 3(\mu^2+\sigma^2)\mu + 3(\mu)\mu^2 - \mu^3 = 0$$

[177] Una Función de Densidad de Probabilidad Normal que tiene una desviación típica menor a uno es leptocúrtica (puntiaguda), en oposición, la que tiene una desviación típica mayor a uno es mesocúrtica (aplanada). En el primer caso, su coeficiente de curtosis es menor a tres, en el segundo caso igual al tres y en el tercero mayor a tres. De forma análoga a lo realizado para encontrar el coeficiente de sesgo, para encontrar el coeficiente de curtosis se puede derivar cuatro veces la función generadora de momentos; siendo que habiéndose derivado por tres veces, como esta expresado en el anterior punto aclaratorio se tiene,

$$M_x^{(3)}(t) = \left(\boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}\ (t\sigma^2+u)}\right)((\boldsymbol{t\sigma^2+u})^2+\boldsymbol{\sigma^2}) + (\boldsymbol{2(t\sigma^2+u)\sigma^2})\boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}}$$

derivándola una vez más,

$$M_x^{(4)}(t) = \left[\left(\boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}\ (t\sigma^2+u)}\right)(\boldsymbol{t\sigma^2+u}) + \boldsymbol{\sigma^2 e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}}\right][(\boldsymbol{t\sigma^2+u})^2+\boldsymbol{\sigma^2}] + [\boldsymbol{2\ (t\sigma^2+u)\sigma^2}]\left(\boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}\ (t\sigma^2+u)}\right) + (\boldsymbol{2\sigma^4})\boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}} + \boldsymbol{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}+t\,\mu}(t\sigma^2+u)(\ 2(t\sigma^2+u)\sigma^2)}$$

Que estimada en cero, a fin de obtener el cuarto momento no desplazado:

$$E(x^4) = [(1(0+u)(0+u)+\sigma^2 1][(0+u)^2+\sigma^2] + [2\ (0+u)\sigma^2]\big(1\ \ (0+u)\big) + (2\sigma^4)1 + 1(0+u)(\ 2(0+u)\sigma^2)$$

$$E(x^4) = [u^2+\sigma^2][u^2+\sigma^2] + [2\ u\sigma^2](u) + (2\sigma^4) + u(\ 2u\sigma^2)$$

Tipificación de Una Variable Aleatoria Normal.-

La conversión de una variable aleatoria normal no típica, x en una típica, z (repitiendo, que tiene por media cero y desviación típica uno) para efecto de poder usar la tabla que consigna su probabilidad acumulada[178], se realiza de forma sencilla, restándole su media y dividiéndola entre su desviación típica[179];

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$E(x^4) = [u^4 + 2u^2\sigma^2 + \sigma^4] + [2\,u^2\sigma^2] + (2\sigma^4) + (\,2u^2\sigma^2)$$
$$\boldsymbol{E(x^4) = u^4 + 6u^2\sigma^2 + 3\sigma^4}$$

Reemplazando los valores encontrados en el anterior acápite y el presente, luego de desarrollar; la esperanza de las desviaciones cuárticas respecto a la media, por el binomio de Newton, se obtiene,

$$E((x-\bar{x})^4) = E(x^4 - 4x^3\bar{x} + 6x^2\bar{x}^2 - 4x\bar{x}^3 + \bar{x}^4)$$
$$E((x-\bar{x})^4) = (\boldsymbol{u^4 + 6u^2\sigma^2 + 3\sigma^4}) - \boldsymbol{4}(\mu^3 + 3\mu\sigma^2)u + 6(\mu^2+\sigma^2)u^2 - 4uu^3 + u^4)$$
$$E((x-\bar{x})^4) = 4u^4 + 8u^2\sigma^2 + 3\sigma^4$$

Evaluando en los parámetros que determinan la normal típica,

$$\sigma = 1 \quad \text{y} \quad u = 0$$
$$\boldsymbol{E((x-\bar{x})^4) = 3}$$

[178] Que se encuentra desplegada en el Apéndice N°…..

[179] Esta es una aplicación especial del "Teorema De la Transformación Lineal de Una Normal" que dice: **Si una variable aleatoria distribuida normalmente, se transforma en otra multiplicándola por "a" y sumándole una constante "b", la variable transformada se distribuye también normalmente y tiene por media la media de la normal original multiplicada por "a" más la constante "b" y por variancia, la constante "a" elevada al cuadrado, multiplicada por la variancia de la variable original.**

En los antiguos textos se la denomina Variable Normal Estándar.

Que consiguientemente tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \; para \; x \in \;]-\infty \;\; \infty[$$[180]

Ilustración.- Dada la variable aleatoria distribuida normalmente, con media en 5 y desviación típica en 2, se convierte en una variable aleatoria típica, con media en cero y desviación típica en 1, si se realiza la operación apuntada,

$$z = \frac{x-5}{2}$$

La tipificación de la variable aleatoria permite calcular la probabilidad de que ocurra cualquier intervalo que se suscite en el dominio de una Variable Aleatoria Normal, mediante el uso de la tabla expuesta en el apéndice N° 5, que refiere la probabilidad acumulada de una variable aleatoria típica en todo su dominio, es decir expresa:

$$P(z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

El valor de z, la abscisa normal típica, hasta el primer decimal se encuentra reflejado en la primera columna de la tabla, el cual es precisado usando la primera fila[181], el valor que refiere la intersección de los elementos marginales que se han señalado, representa la probabilidad acumulada de una Variable Aleatoria Normal Tipificada hasta “t”.

[180] Evidentemente una función par, es decir f(x)=f(-x).

[181] Es decir se encuentra definido por los elementos marginales de la referida tabla.

Por otra parte, la tabla puede ser usada, de forma inversa, es decir observando la probabilidad acumulada, en el interior de la tabla para luego encontrar la abscisa a la que corresponde, en los márgenes derecho y superior (usados conjuntamente en el orden en el que se han mencionado)

Ilustración.-

a) El peso de un conjunto de niños de 10 años de una determinada región, se halla distribuido normalmente con media en 25 kilos y una desviación típica de 2 kilos, calcular la probabilidad que un niño del grupo referenciado pese entre 23 y 24,65 kilos.

1) Se tipifican los valores indicados,

$$Z_1 = \frac{23-25}{2} = -1,$$

$$Z_2 = \frac{24{,}65-25}{2} = -0{,}175$$

2) El problema se ha transformado en el cálculo de encontrar la probabilidad que una variable aleatoria típica, se encuentre en el intervalo $[-1 \qquad -0{,}175]$,

3) Entonces se busca en la tabla la probabilidad acumulada de -0,175, como ésta, no se refleja en la tabla, se interpola linealmente la probabilidad acumulada correspondiente a --0,17 (0,4325) con la probabilidad acumulada de- 0,18 (0,4286) representando en consecuencia la probabilidad de -0,175 el valor 0,4306[182] . Luego se

[182] La interpolación lineal referida usa la fórmula:

$$PA_m = PA_{inferior} + \frac{ABS_m - ABS_{inferior}}{ABS_{superior} - ABS_{inferior}} \left(PA_{superior} - PA_{inferior}\right)$$

encuentra en la tabla la probabilidad correspondiente a -1 que es igual a 0,1587.

3) El resultado es la diferencia de ambas probabilidades acumuladas,

$$0{,}2719 = 0{,}4306 - 0{,}1587$$

Representa la probabilidad de encontrar un niño con un peso entre los 23 y los 24,65 kilos.

Ilustración.- Encontrar la abscisa normal típica que corresponde a una probabilidad acumulada de 0,90

Resolución:

1) Se busca dentro de los márgenes de la tabla, el valor más próximo a 0,90, el hallado tiene el valor de 0,8997 (que difiere en tres diez milésimas de 0,9)

2) se observa por la observación del margen izquierdo y el superior que abscisa corresponde en la tabla es de 1,28. Es decir, hasta este valor se acumuló un 90% de probabilidad, dado el desarrollo de la variable aleatoria.

Que encuentra la probabilidad acumulada en el punto **m**, en este caso 0,175, a partir de las Probabilidades Acumuladas posibles de encontrar en la tabla, de las abscisas superior e inferior, que en este caso son 0,18 y 0,17 respectivamente.

Variable Aleatoria Gama.-

La variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad tiene un dominio definido en los Reales No Negativos y se circunscribe al algoritmo de dos parámetros α y β que se expone a continuación[183] :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

que muchas veces es presentado en la forma equivalente:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\frac{x}{\beta})^{\alpha-1} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

recibe el nombre de Gama de parámetros α, β, (positivos), la cual es extremadamente importante en la descripción de procesos estocásticos que dependen del tiempo[184] y, la función holónimo de muchas otras funciones de densidad de probabilidad muy utilizadas. En particular una de sus aplicaciones más importantes es la representación del tiempo que transcurre hasta que se hagan efectivos un número determinado de sucesos aleatorios idénticos.

---

[183] El algoritmo $\boldsymbol{\Gamma(\alpha)}$ representa, "La Función Gama" de argumento $\boldsymbol{\alpha}$, el estudio detallado de la precitada función, corresponde a la matemática superior, sin embargo en el límite de nuestro interés, se dirá que, el valor de este parámetro compuesto de la función explanada en el texto es:

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\propto-1} e^{-x}\ dx}$$

Cuya importante característica de recurrencia es:

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha)}$$

La que implica, en el caso de que α sea un número natural, que la función represente el factorial del indicado,

$$\boldsymbol{n! = \Gamma(n+1)}$$

Otra función importante es la función Beta, de parámetros a,b que se define como **

[184] El tiempo necesario hasta que un determinado número de sucesos acontezca.

Se puede demostrar que el algoritmo reseñado representa una función de densidad de probabilidad, observando la evidente positividad de la indicada función además de verificar que el área que encierra es igual a la unidad, de la siguiente manera:

1) $$A = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \right) dx =$$

$$A = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \int_{0}^{\infty} \left((\frac{x}{\beta})^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \right) dx$$

2) Realizando el cambio de variable $u = \frac{x}{\beta}$

que implica que $dx = \beta\ u\ du$

3) Remplazando

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \int_{0}^{\infty} (\ (u)^{\alpha-1}\ e^{-u})\ \beta\ u\ du =$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \int_{0}^{\infty} (\ (u)^{\alpha-1}\ e^{-u})\ \beta\ u\ du$$

Se hace notoria como sub integral, la función gamma de α

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta}{\beta} \int_{0}^{\infty} (\ (u)^{\alpha-1}\ e^{-u})\ u\ du = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\beta}{\beta} = 1$$

La esperanza matemática de una Variable Aleatoria Gama es,

$$E(x) = \beta\ \alpha$$

Resultado al que se arriba, bajo el siguiente baremo:

1) Por definición de Esperanza Matemática de una Variable Aleatoria Continua, reducida en el campo de definición de la Variable Aleatoria Gama

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx =$$

$$E(x) = \int_{0}^{\infty} x\, f(x)dx =$$

$$E(x) = \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

2) Reduciendo la variable x mediante la suma de sus exponentes, multiplicando el parámetro beta fuera de la integral y dividiendo el paréntesis que contiene la variable por éste parámetro para que toda la expresión contenida dentro del señalado quede elevada a α, además de multiplicar el numerador y el denominador por α, se tiene,

$$E(x) = \frac{\alpha}{1} \int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx =$$

$$E(x) = \alpha \frac{1}{\frac{1}{\beta}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{(\alpha+1)-1} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx =$$

3) Aplicando la propiedad de recurrencia de la Función Gama, es decir que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\, \Gamma(\alpha)$

$$\alpha\beta \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{(\alpha+1)-1} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \alpha\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{(\alpha+1)-1} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

4) Se hace evidente dentro de la integral una Variable Aleatoria Gama de parámetro $\alpha + 1$ evaluada en todo su campo de existencia, por lo tanto igual a la unidad.

$$\alpha\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{(\alpha+1)-1} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \alpha\beta\ (1) = \alpha\beta$$

La Variancia de la Variable Aleatoria Gama es:

$$V(x) = \beta^2 \alpha$$

Para demostrar el resultado se sigue el procedimiento que continúa,

1) Se decide encontrar la variancia aplicando la fórmula que la relaciona con el primer y el segundo momento de la variable aleatoria,

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

2) Se plantea el segundo momento de la variable aleatoria, reduciéndola en su campo efectivo de existencia,

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

3) Se multiplica fuera de la integral por $\alpha(\alpha + 1)$ y se hace lo propio en el denominador de la integral, luego se multiplica dentro de la integral por $\left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ y se divide por la misma cantidad fuera de la integral, obteniéndose dentro de la integral una Variable Gama con parámetro $(\alpha + 2)$, valuada en todo su campo de existencia (consecuentemente igual a uno);

$$\alpha(\alpha+1)\int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)}\ (\frac{x}{\beta})^{\alpha-1}\ \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$$

$$\alpha(\alpha+1)\beta^2\int_0^{\infty} \frac{x^{(\alpha+2)-1}}{\beta}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\ \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$$

Si $\int_0^{\infty} \frac{x^{(\alpha+2)-1}}{\beta}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\ \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx = 1$ entonces:

$$\alpha(\alpha+1)\beta^2\ (1) = \alpha\beta^2(\alpha+1)$$

4) Obtenido el segundo momento de la variable aleatoria, se aplica la expresión para encontrar la variancia, referida en el inciso 1).

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \ \alpha\beta^2(\alpha+1) - (\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \boldsymbol{\alpha\beta^2}$$

Relación de la Variable Aleatoria Gama Con la Variable Aleatoria Exponencial.-

En el caso de que α sea igual a 1 la Función de Densidad de Probabilidad Gama se corresponde a la de una Variable Aleatoria Exponencial[185],

$$f(x) = \frac{x^{1-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(1)\beta^1} = \ \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}$$

de parámetro β, en la que el indicado, representa la esperanza matemática y la variancia de la variable aleatoria son, respectivamente,

$$E(x) = \alpha\beta = 1\,\beta = \beta$$

[185] En vista de que es evidente que $\Gamma(\alpha) = 1$, por otra parte un resultado, menos ostensible pero igualmente importante en referencia a esta función es que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

$$V(x) = \alpha\, \beta^2 = 1\ \beta^2 = \beta^2$$

por lo que puede ser escrito el complemento de su función acumulada de probabilidad[186] por la expresión que sigue,

$$1 - P(X < x) = 1 - F(x) =$$

$$= 1 - \int_0^x \left(\frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}}\right) dt = e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Con capacidad de representar, la probabilidad de que el componente específico de un sistema funcione, sin falla, después de un determinado tiempo *x,* situación que también pudiera ser descrita de forma equivalente, mediante una variable aleatoria de L´Poisson, como la probabilidad de que el componente que en el tiempo *x,* en promedio produce λ fallas, funcione presentando cero fallas en esa unidad de tiempo, lo anterior implica en los algoritmos correspondientes,

$$P(y = 0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

Al existir una relación biunívoca entre la media de las fallas esperadas, λ en un lapso de tiempo de tamaño *x,* con el transcurso de tiempo en el que se espera acontezca una falla, denominado β, de la forma, $\frac{1}{\beta}x = \lambda$, es decir, el tiempo medio en el que se espera ocurra una falla, calculado en su probabilidad mediante una Variable Exponencial, es igual a la esperanza matemática de la Variable Aleatoria de Poisson, a su vez la inversa del promedio de fallas esperadas en un tiempo unitario λ, multiplicado por la extensión del referido tiempo.

[186] La probabilidad de que la variable adquiera valores superiores a un valor determinado, perteneciente a su dominio.

Ilustración.- La probabilidad de que un foco cuya duración media es de 150 horas sin presentar falla, puede ser representada por una variable aleatoria exponencial, con la siguiente función de densidad de probabilidad,

$$f(x) = \frac{1}{150} e^{-\frac{x}{150}}$$

Correspondiendo la probabilidad de que funcione por encima de las 300 horas a:

$$p(x \geq 300) = \int_{300}^{\infty} \left(\frac{1}{150} e^{-\frac{x}{150}} \right) dx = -e^{-\frac{x}{150}} \Big|_{300}^{\infty} = e^{-\frac{x}{150}} \Big|_{\infty}^{300} = (e^{-2}) = 0{,}131$$

El mismo resultado puede ser encontrado mediante una Variable Aleatoria de Poisson, teniendo en cuenta que la probabilidad de que el componente presenta en trescientas horas en promedio dos fallas (porque es el doble de 150 horas); es decir de forma abstracta $\frac{1}{\beta} x = \lambda$, que remplazando datos significa $(\frac{1}{150})(300)= 2$. En consecuencia el problema se reduce a calcular la probabilidad que un componente presente cero fallas, sujeto a la indicada ley Poisson de probabilidad.

$$p(x = 0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = 0{,}131$$

a partir de lo expresado, se puede deducir que, la suma de n variables aleatorias exponenciales idénticas e independientes con parámetro $\frac{1}{\beta}$ se distribuye de acuerdo a una variable aleatoria Gama con parámetros $\alpha = n \ y \ \beta = \beta$ y entonces argumentar la relación que se expone en el siguiente punto.

Relación Con la Variable Aleatoria de L´Poisson.-

Si el parámetro α se corresponde a un entero positivo, n, la Función de Densidad de Probabilidad Gama puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n} x^{n-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Llamada entonces Función de Densidad de Probabilidad de la Variable Aleatoria de Erlang[187], teniendo al estar definida únicamente para valores positivos una Función de Distribución de Probabilidad:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt =$$

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\beta}}\right) dt$$

Equivalente por el teorema de Complementariedad de Probabilidad[188] a,

$$F(x) = 1 - \int_x^\infty f(t)\, dt =$$

$$F(x) = 1 - \int_x^\infty \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\beta}}\right) dt$$

Reordenando los términos,

$$F(x) = 1 - \int_x^\infty \left(\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{\beta}}\right) \frac{1}{\beta} dt$$

[187] Nombre otorgado en honor a su inventor, Agner Kraroup Erlang, matemático estadístico e ingeniero Danés, inventor de la Teoría de las Colas.

[188] Desarrollado en la página 110 del primer tomo.

Realizando el cambio de variable $p = \frac{t}{\beta}$ que implica que $t = \beta\ p\ \ además\ que, dt =\ \beta\ dp$ se tiene,

$$F(y) = 1 - \int_{p}^{\infty} (\frac{1}{(n-1)!}\ (p)^{n-1}\ e^{-\,p})dp$$

Expresión que puede escribirse como:

$$1 - F(y) = \int_{p}^{\infty} (\frac{1}{(n-1)!}\ (p)^{n-1}\ e^{-\,p})dp$$

Semejante por la recurrencia de la integral a:

$$1 - F(y) = \sum_{p}^{\infty} (\frac{1}{(n-1)!}\ (p)^{n-1}\ e^{-\,p})$$

Que hace evidente que y representa una Variable Aleatoria de Poisson en la que $y = \beta\ x$

Ilustración.- En referencia a la ilustración anterior, calcular la probabilidad de que el componente del sistema referido anteriormente presente tres fallas antes de la mitad del tiempo especificado como su duración media.

1) En atención al planteamiento, el componente se sujeta a la Función Gamma, de parámetros $\alpha = 3\ y\ \ \beta = 150$ que tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{150}\right)^{3} x^{2}\ e^{-\frac{x}{150}}$$

2) Por lo que el tiempo esperado para que se produzcan tres fallas es, $\alpha\beta = 450$ horas

3) Lo anterior hace que la probabilidad de que falle antes de la mitad del tiempo especificado como duración media sea:

$$p(x < 225) = \int_0^{225} \left(\frac{1}{3!} \left(\frac{1}{150} \right)^3 t^2 \, e^{-\frac{t}{150}} \right) dt$$

4) Sin embargo por la relación que existe entre la Variable Aleatoria Gama y Poisson el problema se proyecta a la probabilidad de que el componente que se espera falle tres veces a las 450 horas, presente menos de tres fallas en 225 horas, cuando el promedio de 3 fallas en este lapso es $\lambda = \frac{1}{\beta}\frac{1}{n}225 = \frac{1}{150}\ \frac{1}{3}225 = 0{,}5$

5) Revisando tabla de la Función Complementaria Acumulada de Poisson, $1 - F(x - 1)$ desarrollada en el apéndice N°7, con parámetro λ=0,5, para el valor de *x =2,* que señala la probabilidad de que ocurrieron 3 o más fallas, se tiene que la indicada es de 0,90204, por lo que la probabilidad de su complemento, que significa que el sistema tuvo tres fallas durante ese lapso de tiempo es 0,09796.

Variable Aleatoria Chi Cuadrado (χ^2).-

El merónimo más importante de la Variable Aleatoria Gama es la Variable Aleatoria Chi Cuadrado, descubierta por el matemático karl Pearson[189], cuya función de densidad de probabilidad, como en el caso de toda Variable Aleatoria Gama, se sujeta a dos parámetros,α y β que en este caso toman en el orden que se los ha referenciado los valores α=n/2 y β=2;

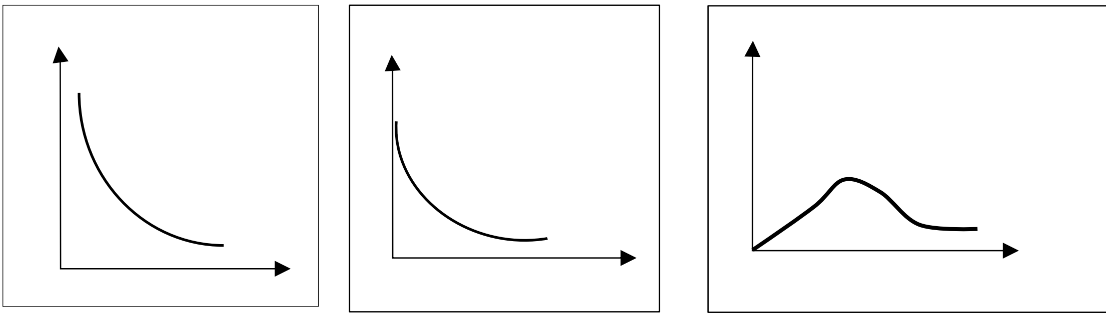
---

[189] Karl Pearson (1857-1936) fue un prominente científico, matemático y pensador británico, que estableció la disciplina de la estadística matemática. Desarrolló una intensa investigación sobre la aplicación de los métodos estadísticos en la biología y fue el fundador de la bioestadística.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \; x^{\frac{n}{2}-1} \, e^{-\frac{x}{2}}$$

Para todos los valores positivos de la variable, $x>0$, en esta expresión, n recibe el nombre de Grados de Libertad. Los esquicios de esta función para distintos grados de libertad son:



El segundo gráfico, refiere una variable aleatoria exponencial, es decir que una variable aleatoria Chi Cuadrado con 2 grados de libertad, equivale a una Variable Aleatoria Exponencial.

Al pertenecer a la familia de las variables aleatorias Gama, su esperanza matemática y su variancia son (en aplicación de los resultados encontrados para la esperanza matemática y la variancia de una Variable Aleatoria Gama):

$$Ex) = \alpha\beta = \left(\frac{n}{2}\right)(2) = n \qquad y$$

$$V(x) = \alpha\beta^2 = \left(\frac{n}{2}\right)(2^2) = 2n$$

Relación de la Variable Aleatoria Chi Cuadrado con la Normal.- **La suma de n variables aleatorias normales independientes, se distribuye de acuerdo a una Chi Cuadrado con n grados de libertad**, para probar la anterior afirmación, se pueden seguir los siguientes pasos:

1) En primera instancia se debe demostrar que la Distribución de Probabilidad de una Variable Aleatoria Normal Típica se distribuye como una Chi Cuadrado con un grado de libertad:

$$\boldsymbol{z \sim N(0,1) \rightarrow z^2 = x \sim \mathcal{X}_1^2}$$

Partiendo de la Función de Densidad de Probabilidad de la Normal Típica, se tiene

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Que permite encontrar la distribución de z^2

$$\sum_{i=1}^{i=n} z_i^2 = x \quad \boldsymbol{tal\ que\ si} : \boldsymbol{z \sim N(0,1) \rightarrow x \sim \mathcal{X}_n^2}$$

Función de Distribución de Probabilidad de la $\mathcal{X}_n^2$.- Por lo expuesto la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria es:

$$F(x) = \int_0^t \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \; x^{\frac{n}{2}-1} \, e^{-\frac{x}{2}}\right) dx$$

Cuyas abscisas, en referencia de la probabilidad acumulada, pueden ser encontradas en la tabla plasmada en el apéndice N°………, en cuya primera columna se expresa el número de grados de libertad de la variable aleatoria, en tanto que el margen superior refiere la probabilidad acumulada correspondiente.

Ilustración.- Observamos en la tabla que la probabilidad acumulada de 0,25 en una variable aleatoria con diez grados de libertad, implica una abscisa $\mathcal{X}_{10}^2$ de 6,37.

VARIABLE ALEATORIA F DE SNEDECOR .-

El cociente x de dos variables aleatorias, *u,* y *v* Chi Cuadrado[190], independientes, divididas por sus n_1 y n_2 grados de libertad, respectivamente, es decir,

$$x = \frac{\frac{u}{n_1}}{\frac{v}{n_2}}$$

se distribuye bajo una ley de Snedecor, sobrenombre otorgado a su inventor R.A. Fisher, a principios de 1920, cuya función de densidad de probabilidad se plasma en el algoritmo:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\ \left(1+\frac{n_1 x}{n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

Definido en los reales positivos; además se puede demostrar el resultado anotado de la siguiente manera:

1) Se encuentra previamente la función de densidad de probabilidad conjunta de *u* y *v,* que no es más que el producto de

[190] El cociente de dos Variables Aleatorias Gama, con parámetros $\left(\frac{n_1}{2}, \frac{1}{2}\right) y \ \left(\frac{n_2}{2}, \frac{1}{2}\right)$, en el numerados y en el denominador respectivamente.

sus funciones de densidad de probabilidad, es decir, por la independencia aludida es el producto de sus funciones de probabilidad marginales;

$$s(u,v) = g(u)h(v) =$$
$$\left(\frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} \; u^{\frac{n_1}{2}-1}\, e^{-\frac{u}{2}}\right)\left(\frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \; v^{\frac{n_2}{2}-1}\, e^{-\frac{v}{2}}\right)$$

2) Se genera una variable auxiliar w , $w = v$ a efecto de proyectar la función s bidimensional, a un espacio de la misma dimensión, es decir, para poder representar la distribución conjunta $s(u,v)$mediante una función $t(x,w)$.

3) Por lo anterior se presenta,

$$x = \frac{\frac{u}{n_1}}{\frac{v}{n_2}} \;\; y \;\; w = v$$

Que implica $\quad u = \frac{x\,v\,n_1}{n_2} = \frac{x\,w\,n_1}{n_2} \quad y \;\; v = w$

4) El paso del espacio (u,v) al espacio (x,w) presenta como relación de equivalencia de las áreas intervinientes en la transformación, el Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n_1\,w}{n_2} & \frac{n_1\,x}{n_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n_1\,w}{n_2}$$

5) Que permite escribir la función de densidad conjunta $t(x,w)$ en el espacio (x,w)

$$t(x,w) = \left(\frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)}\left(\frac{x\,w\,n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{\frac{x\,w\,n_1}{n_2}}{2}}\right)\left(\frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\; w^{\frac{n_2}{2}-1}\, e^{-\frac{w}{2}}\right)\frac{n_1\,w}{n_2}$$

6) Usando la función conjunta, se encuentra la función de densidad de probabilidad marginal de x,

$$f(x) = \int_0^{\infty} t(x,w)dw = \int_0^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)}\left(\frac{x\,w\,n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{\frac{x\,w\,n_1}{n_2}}{2}}\right)\left(\frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\; w^{\frac{n_2}{2}-1}\, e^{-\frac{w}{2}}\right)\frac{n_1\,w}{n_2}\right]dw$$

7) Que se expresa del siguiente modo:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\frac{n_1}{n_2}\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{x\;n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} w^{\left(\frac{n_1}{2}-1\right)+\left(\frac{n_2}{2}-1\right)+1}\;\; e^{-\frac{\frac{x\,w\,n_1}{n_2}}{2}-\frac{w}{2}}\right]dw$$

Extrayendo las constantes, expresiones que no dependen de w, fuera de la integral

$$f(x) = \frac{1}{2^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{x\;n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\int_0^{\infty}\left[w^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)-1}\;\; e^{-\frac{x\,w\,n_1}{2\,n_2}-\frac{w}{2}}\right]dw$$

Factorizando el exponente en la integral

$$f(x) = \frac{1}{2^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{x\;n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1}\int_0^{\infty}\left[w^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)-1}\;\; e^{-\frac{w}{2}\left(\frac{n_1}{n_2}x+1\right)}\right]dw$$

8) Sustituyendo

$$\vartheta = \frac{w}{2}\left(\frac{n_1}{n_2}\ x + 1\right)$$

Que implica $w = 2\left(\frac{n_1}{n_2}\ x + 1\right)^{-1} \vartheta$

Cuya diferencial es

$$dw = 2\left(\frac{n_1}{n_2}\ x + 1\right)^{-1} d\vartheta$$

La marginal se transforma en

$$f(x) = \frac{1}{2^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{x\ n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} 2\left(\frac{n_1}{n_2}\ x + 1\right)^{-1} \int_0^{\infty} \left[\left(2\left(\frac{n_1}{n_2}\ x + 1\right)^{-1} \vartheta\right)^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)-1}\ e^{-\vartheta} \right] d\vartheta$$

Extrayendo fuera de la integral las expresiones que no dependen de ϑ,

$$f(x) = \frac{1}{2^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{x\ n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} 2\left(\frac{n_1}{n_2}\ x + 1\right)^{-1} \left(2\left(\frac{n_1}{n_2}\ x + 1\right)^{-1}\right)^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)-1} \int_0^{\infty} \left[\vartheta^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)-1}\ e^{-\vartheta} \right] d\vartheta$$

Que hace evidente que la integral define una Función Gama de $\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)$,

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\ \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{2^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} (x)^{\frac{n_1}{2}-1}\ 2\ 2^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)-1} \left(\frac{n_1}{n_2}\ x + 1\right)^{-1} \left(\left(\frac{n_1}{n_2}\ x + 1\right)^{-1}\right)^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)-1}$$

Reduciendo términos semejantes

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{2^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}(x)^{\frac{n_1}{2}-1}\quad 2^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$$

$$\left(\frac{n_1}{n_2}x+1\right)^{-1}\left(\left(\frac{n_1}{n_2}x+1\right)^{-1}\right)^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)-1}$$

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}(x)^{\frac{n_1}{2}-1}$$

$$\left(\frac{n_1}{n_2}x+1\right)^{-1}\left(\left(\frac{n_1}{n_2}x+1\right)^{-1}\right)^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)-1}$$

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}(x)^{\frac{n_1}{2}-1}$$

$$\left(\frac{n_1}{n_2}x+1\right)^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}x+1\right)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)+1}$$

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}(x)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(\frac{n_1}{n_2}x+1\right)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$$

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\,x+1\right)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}}(x)^{\frac{n_1}{2}-1}$$

La demostración de que la variable aleatoria F representa una función de densidad de probabilidad, se puede desarrollar de la siguiente manera:

1) Se hace evidente que en todo su campo de definición, que son los reales positivos, la función es positiva, entonces queda por demostrar que en el referido campo, la integral inherente es igual a uno,

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\Gamma(\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\,x+1\right)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}}(x)^{\frac{n_1}{2}-1}dx$$

2) Se extraen todas las constantes fuera de la integral

$$I=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{n_1}{n_2}\,x+1\right)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}}(x)^{\frac{n_1}{2}-1}dx$$

3) Se reordenan términos

$$I=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{(x)^{\frac{n_1}{2}-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\,x+1\right)^{+\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}}{1}dx$$

4) Se sustituye la variable $u = \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\,x\right)^{-1}$, esta sustitución de variable, conduce a cambiar los límites de integración de 0 a ∞ por los nuevos 1 a 0, en virtud de que son esos los nuevos extremos de la variable u cuando se los sustituye en su relación con *x.* explicitando, *x,*

$$u = \frac{1}{\left(\frac{n_1}{n_2}x+1\right)^1} = \frac{1}{\left(\frac{n_1}{n_2}x+\frac{n_2}{n_2}\right)} = \frac{1}{\frac{n_2+n_1x}{n_2}} = \frac{n_2}{n_2+n_1x}$$

Implica,

$$u(n_2 + n_1x) = n_2$$

$$u\,n_2 + n_1u\,x = n_2$$

$$x = \frac{n_2-n_2\,u}{n_1\,u} = \boldsymbol{\frac{n_2(1-u)}{n_1\,u}}$$

Y expresando la diferencial de x, en términos de u,

$$dx = \frac{n_2}{n_1}\left[\frac{-1u-(1-u)}{u^2}\right]dx = \frac{n_2}{n_1}\left[\frac{-1}{u^2}\right]du$$

5) Se plantea la integral en términos de u y su diferencial

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\int_1^0 \frac{\left(\frac{n_2(1-u)}{n_1\,u}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} u^{\frac{n_1+n_2}{2}}}{1}\frac{n_2}{n_1}\left[\frac{-1}{u^2}\right]du$$

Que invierte sus límites de integración merced al cambio del signo que aparece en el numerador del último corchete,

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^1 \frac{\left(\frac{n_2(1-u)}{n_1\, u}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} u^{\frac{n_1+n_2}{2}}}{1} \frac{n_2}{n_1}\left[\frac{1}{u^2}\right] du$$

6) Se extraen las constantes dentro de la integral y se las multiplica con los términos semejantes, quedando,

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^1 \frac{\left(\frac{(1-u)}{u}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} u^{\frac{n_1+n_2}{2}}}{1}\left[\frac{1}{u^2}\right] du$$

7) Se reducen u, mediante la suma de exponentes,

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^1 (1-u)^{\frac{n_1}{2}-1} u^{-\left(\frac{n_1}{2}-1\right)+\frac{n_1+n_2}{2}-2} du$$

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^1 (1-u)^{\frac{n_1}{2}-1} u^{\left(\frac{n_2}{2}-1\right)} du$$

8) De forma prístina se encontró bajo el signo de la integral definida, una forma Beta, $\beta\left(\frac{n_1}{2};\frac{n_2}{2}\right)$, que representada mediante funciones gama es,

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} * \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} = \mathbf{1}$$

Lo que concluye la demostración.

Gráfico de la Variable Aleatoria F.-

Mediante el gráfico que prosigue, se puede observar que la variable presenta asimetría positiva, que a medida que tiende a equiparar sus grados de libertad y estos se hacen más grandes, se aproxima a una variable aleatoria normal;

Uso de la Tabla F.-Mediante el uso de la Tabla F, que se proporciona en el Apéndice 10 cuyo margen superior expresa los grados de libertad en el numerador de una Función de Densidad de Probabilidad F, haciendo lo propio con los grados de libertad en su denominador su margen izquierdo, es posible encontrar en la intersección de las columnas con las filas pertinentes, la abscisa de la Función de Densidad de Probabilidad F, que corresponde al complemento de las probabilidades acumuladas de un 5% y de un 1% [191], para varias posibilidades de combinaciones de grados de libertad en el numerador y el denominador.

Ilustración.-

1) Se observa en la tabla que una F con 6 grados de libertad en el numerador y 2 grados de libertad en el denominador acumula un 95% de probabilidad cuando su abscisa es 19.33 y la misma función acumula un 99% de probabilidad cuando su abscisa se hace 99,3.

2) En una F con 20 grados de libertad en el numerador y 7 grados de libertad en el denominador, la abscisa que corresponde a una probabilidad acumulada de un 95% es 3,44, siendo 6,16 la que corresponde a una acumulación de probabilidad de un 99%.

[191] Obviamente implican probabilidades acumuladas de un 95% y de un 99%, respectivamente.

Bibliografía

ALEA, **V.** et al. (1999), "*Estadística Aplicada a les Ciències Econòmiques i Socials". *Barcelona: Edicions McGraw-Hill EUB.

CANAVOS, G. (1988), *"Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos"*. México: McGraw-Hill.

DURA PEIRO, **J. M. y LÓPEZ CUÑAT, J.M.** (1992), "*Fundamentos de Estadística. Estadística Descriptiva y Modelos Probabilísticos para la Inferencia"*. Madrid: Ariel Editorial.

ESCUDER, **R. y SANTIAGO, J**. (1995), *"Estadística aplicada. Economía y Ciencias Sociales".* Valencia: Tirant lo Blanch.

FERNáNDEZ CUESTA, **C., y FUENTES GARCíA, F**. (1995), "*Curso de Estadística Descriptiva. Teoría y Práctica2.* Madrid: Ariel.

FREEDMAN, D., et al. (1991), "*Estadística".* Barcelona: A.Bosch Ed.

FREEDMAN, D., et al**.** (1991), "*Estadística".* Barcelona: A.Bosch Ed.

FREIXA, M., et al. (1992), "*Análisis exploratorio de datos: Nuevas técnicas estadísticas"*. Barcelona: PPU.

GUJARATI, D. (1997), "*Econometría Básica".* Bogotá: McGraw-Hill.

KMENTA, J (1980), "*Elementos de Econometría".* Barcelona: Vicens Universidad.

MARTÍN PLIEGO, F. (1994), "*Introducción a la Estadística Económica y Empresarial"*. (Teoría y Práctica) Madrid: AC.

MARTÍN PLIEGO, F. RUIZ-MAYA, L. (1995), *"Estadística I: Probabilidad".* Madrid: AC.

MARTÍN PLIEGO, F. y RUIZ-MAYA, L. (1995), *"Estadística II: Inferencia"*. Madrid: AC.

MARTíN-GUZMÁN, P. y MARTÍN PLIEGO, F. (1985), *"Curso Básico de Estadística Económica"*. Madrid: AC.

MENDENHALL, W., et al. (1994), *"Estadística Matemática con Aplicaciones".* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

MONTIEL, A.M., RIUS, F. y BARÓN, F.J. (1997), *"Elementos Básicos de Estadística Económica y Empresarial"*. Madrid: Prentice Hall.

NEWBOLD, P. (1996), *"Estadística para los negocios y la economía"*. Madrid: Prentice Hall.

PEÑA, D. y ROMO, J. (1997), *"Introducción a la Estadística para las ciencias sociales"*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España.

PEREZ, **C.** (1995), *"Análisis Estadístico con Statgraphics. Técnicas Básicas"*. Madrid: Ra-Ma.

TANUR, J. (1992), *"La Estadística, una Guía de lo Desconocido"*. Madrid: Alianza Editorial.

URIEL, E. y MUÑIZ, M. (1988). *"Estadística Económica y Empresarial. Teoría y ejercicios"*. Madrid: AC.

URIEL, E. y PEIRO, A. (2000), *"Introducción al análisis de series temporales"*. Madrid: AC.